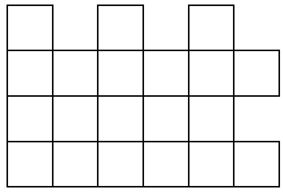
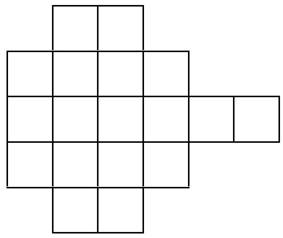
XXX турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2025 года

Личная олимпиада



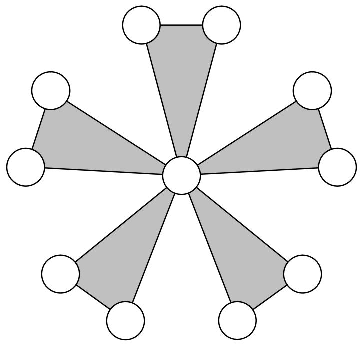
1. В записи Д * Е = Л * И = М * О = С * Т = Ь все буквы заменили на разные цифры, а все звёздочки – на знаки арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление). Получилось верное равенство. Обязательно ли все знаки действий одинаковы? (*А. Шаповалов*)



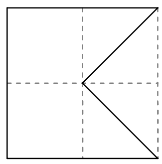
2. **а**) Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, по линиям сетки на две равные части.

б) Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, по линиям сетки на три равные части. (*Н. Чернятьев*)

3. На экзамене по литературе надо было установить соответствие между именами Александр, Иван, Корней и фамилиями писателей Пушкин, Крылов, Чуковский. Ученик пытался сдать экзамен трижды и каждый раз давал на этот вопрос разные ответы. В первые два дня он называл Пушкина Иваном. В какие-то два дня он называл Крылова Корнеем. Как он назвал Чуковского в третий день? (*Б. Френкин, И. Раскина*)



4. Дон Кихот вступил в битву с «математической мельницей», у которой 49 лопастей, представляющих собой треугольники с общей вершиной в центре (на рисунке показан пример такой «мельницы» с пятью лопастями). Чтобы победить «мельницу», надо в вершинах лопастей расставить различные натуральные числа от 1 до 99 так, чтобы сумма трёх чисел на каждой лопасти была простой. Сможет ли Дон Кихот одержать победу? (*А. Грибалко*)



5. Имеется много одинаковых бумажных флажков в виде квадрата 2×2 с вырезанной частью (см. рисунок). Можно ли несколькими такими флажками оклеить в один слой поверхность какого-нибудь куба? (*М. Евдокимов*)

6. Петя и Вася по очереди ставят слонов на крайние клетки доски 25×25, начинает Петя. Петя ставит белых слонов, а Вася – чёрных, при этом нельзя, чтобы слоны разного цвета били друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

7. Вася забронировал квартиру с номером 400 в многоэтажной новостройке. Во всех подъездах здания одинаковое количество этажей, а на всех этажах одинаковое количество квартир (больше одной, но меньше десяти). Потом застройщик поменял порядок нумерации подъездов (справа налево вместо слева направо, других изменений не было), и номер Васиной квартиры стал 323. В каком подъезде и на каком этаже теперь живёт Вася? (*М. Евдокимов*)

8. **а**) На дне рождения четверо детей сидят за квадратным столом – каждый со своей стороны. На столе стоит торт со свечами. Дети, начав с именинника, по часовой стрелке задувают свечи, каждый дует один раз. Для каждого ребёнка рассматриваются все прямые, перпендикулярные его стороне стола и содержащие свечи. Когда он задувает, на каждой такой прямой гаснет только ближайшая к нему горящая свеча. Какое наименьшее количество свечей должно быть на торте, чтобы каждый задул хотя бы одну из них?

б) Та же задача, но неизвестно, в каком порядке дети будут задувать свечи.

(*М. Хачатурян*)

9. По кругу стоят 100 детей. Каждый из них подсчитал, сколько детей противоположного пола среди следующих по часовой стрелке десяти детей. Докажите, что суммы чисел, полученных мальчиками и девочками, равны. (*А. Грибалко*)

10. На доске было написано 2025 натуральных чисел, сумма которых равна их произведению. Лёша стёр все числа, кроме одного. Какое наибольшее число могло остаться на доске? (*А. Доледенок*)

11. В стаде 100 баранов, и не все они весят одинаково. Для какого наибольшего n может оказаться, что сумма масс любых n баранов не превосходит $100-n$ процентов от суммарной массы всего стада? (*А. Блинков, С. Токарев*)

12. Назовём сторону многоугольника хорошей, если на ней можно построить квадрат, центр которого находится на границе этого многоугольника. Какое наибольшее количество хороших сторон может быть у пятиугольника? (*А. Пешнин*)

13. В каждой клетке доски 9×9 сидел муравей. В некоторый момент каждый муравей переполз в соседнюю по стороне клетку. Могло ли после этого в каждой непустой клетке оказаться ровно по три муравья? (*А. Грибалко*)

14. На доске было написано n последовательных натуральных чисел. После того как одно из них стёрли, среднее арифметическое оставшихся оказалось целым числом. Каким по счёту могло быть стёртое число? (*А. Блинков*)

15. На диагонали AC квадрата $ABCD$ отмечена такая точка E, что $AE = CE + DE$. Найдите угол CED. (*Д. Швецов*)

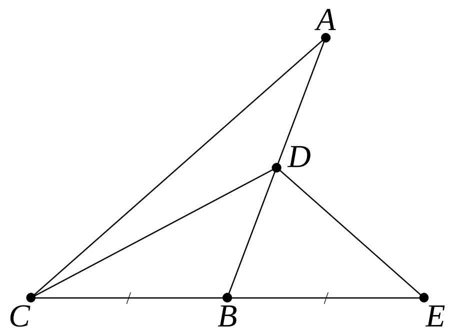
16. **а**) В круге из 33 орков у каждой пары соседей нецелая разность числа зубов. Орки встали в круг в другом порядке. У какого наибольшего количества пар соседей разность числа зубов могла стать целой?

б) В круге из 33 орков у каждой пары соседей в сумме нецелое число зубов. Орки встали в круг в другом порядке. У какого наибольшего количества пар соседей могло стать в сумме целое число зубов? (*А. Шаповалов*)

17. **а**) Учительница загадала два натуральных числа от 2 до 100. Каждый ученик класса также загадал по два натуральных числа, причём у всех учеников пары чисел различаются. Оказалось, что если для каждого ученика из произведения его чисел вычесть произведение чисел учительницы, то получится тот же результат, как если из суммы его чисел вычесть сумму чисел учительницы. Может ли в классе быть больше 30 учеников?

б) Учительница придумала квадратное уравнение $x^2+ax+b=0$, имеющее два натуральных корня, не превосходящих 100. Каждый ученик класса записал целое число, причём все записанные числа различны. Оказалось, что для каждого числа c, записанного каким-либо учеником, квадратное уравнение $x^2+(a-c)x+(b-c)=0$ также имеет два натуральных корня. Может ли в классе быть больше 30 учеников? (*А. Доледенок*)

18. Два равных треугольника ABC и CDE ($AB = CD$, $BC = DE$) расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что если точка B – середина отрезка CE, то точка D – середина отрезка AB. (*И. Русских*)



19. **а**) Есть восемь мешков с одинаковыми на вид монетами, по 100 монет в каждом. Известно, что все монеты в одном мешке весят 4 г, во втором – 5 г, …, в восьмом – 11 г, но неизвестно, где какие. Имеются электронные весы, на которых можно взвесить любой груз от 1 г до 999 г, но их трёхразрядное табло

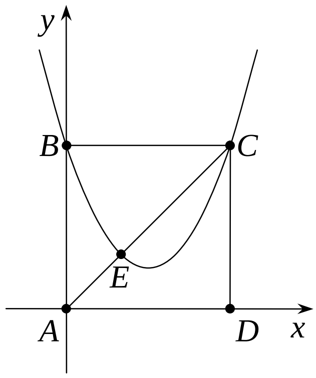
испорчено: в каждом разряде работает только центральный горизонтальный сегмент (цифры показаны на рисунке). Разрешается взять несколько монет из любых мешков и положить их на весы. За какое наименьшее количество взвешиваний можно определить массы монет случайно выбранного мешка?

б) Та же задача, но все монеты в одном мешке весят 1 г, во втором – 2 г, …, в восьмом – 8 г. (*М. Евдокимов*, *А. Грибалко*)

20. Известно, что числа $x^2 - [x]\{x\} + \{x\}^2$ и $x^2 + [x]\{x\} + \{x\}^2$ целые. Обязательно ли x целое? (*А. Блинков*)

21. На окружности отмечено восемь точек, делящих её на равные дуги. Сколькими способами можно выбрать четыре из них так, чтобы все углы четырёхугольника с вершинами в выбранных точках были отличны от прямого? (*В. Панкратьева*)

22. На рисунке изображены квадрат $ABCD$ и график функции $y = x^2 + px + q$, пересекающий диагональ AC квадрата в точке E. Найдите координаты этой точки. (*Д. Мухин*)



23. На биссектрисе угла POQ отмечены точки A и B. Точки C и D – проекции точек A и B на лучи OP и OQ соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника COD проходит через середину отрезка AB. (*Д. Швецов*)

Командная олимпиада

24. Из одной точки в одном направлении с интервалами в 1 час выползло несколько улиток, каждая из которых двигалась со своей постоянной скоростью. Оказалось, что каждая улитка, начиная со второй, догнала первую через час после своего старта. Последняя встреча двух улиток произошла ровно через сутки после старта самой первой улитки. Сколько всего было улиток? (*А. Грибалко*)

25. Все вершины и середины всех рёбер куба с ребром длины 2 отмечены и покрашены в красный цвет. За один ход можно выбрать любые две отмеченные точки на расстоянии 1 и перекрасить их, изменив цвет каждой красной точки на синий и наоборот. За какое наименьшее число ходов можно сделать все отмеченные точки синими? (*М. Евдокимов*)

26. Назовём сумму натуральных чисел зеркальной, если, записав задом наперёд все слагаемые, мы получим тот же результат (например, сумма $9 + 10 + 11 + 12$ зеркальна, так как равна $9 + 01 + 11 + 21$). Найдётся ли такое трёхзначное число N, что сумма $1 + 2 + \ldots + N$ зеркальна? (*А. Шаповалов*)

27. Малыш и Карлсон делят 20 колец разного размера. Есть две вертикальные оси: одна – Малыша, другая – Карлсона. Сначала Карлсон надевает в любом порядке по десять колец на каждую ось, после чего Малыш делает ровно **а**) десять ходов; **б**) 11 ходов. Каждым ходом он снимает одно или несколько колец с верха одной оси и надевает их все на другую в том же порядке, при этом размеры выбранных колец должны возрастать сверху вниз, а нижнее из них не должно оказаться на меньшем. Какое наибольшее число колец может наверняка обеспечить себе Карлсон? (*А. Шаповалов*)

28. На плоскости нарисовано несколько прямых. Если стереть любую из них, то остальные разобьют плоскость ровно на 2025 частей. Может ли количество прямых быть меньше 100? (*А. Шаповалов*)

29. Назовём суперконём фигуру, которая ходит на n клеток по горизонтали или вертикали и на $2n$ клеток в перпендикулярном направлении, где n – произвольное натуральное число. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга суперконей можно расставить **а**) на доске 6×6; **б**) на шахматной доске? (*Г. Караваев*)

30. На острове живут эльфы и тролли, причём эльфов не меньше, чем троллей. Всех попросили написать, сколько всего на острове жителей. Каждый написал двузначное число, при этом эльфы написали правильно, а тролли солгали. Оказалось, что цифра 4 встречается в ответах 44 раза, а цифры 5 и 6 – по 50 раз. Сколько на острове эльфов и сколько троллей? (*И. Русских*)

31. В компании 50 человек, некоторые из них дружат друг с другом. Людей пронумеровали различными числами от 1 до 50, при этом оказалось, что номер каждого человека является делителем суммы номеров его друзей. Докажите, что у кого-то в этой компании чётное число друзей. (*А. Грибалко*)

32. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A, C, ABD и CBD равны 90°, 30°, 80° и 50° соответственно, $AD = 1$. Найдите длину стороны BC. (*М. Марков*)

33. Назовём натуральное число почётным, если в его записи сумма нечётных цифр равна сумме чётных. Докажите, что для любого натурального N найдётся почётное число, кратное N. (*А. Шаповалов*)

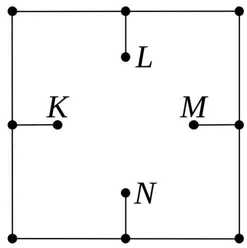
34. **а**) В вершинах правильного девятиугольника лежат девять одинаковых на вид монет, три из них фальшивые – они весят одинаково и легче настоящих. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти все фальшивые монеты, если известно, что они лежат в вершинах равнобедренного, но не равностороннего треугольника?

б) Та же задача для восьми монет, лежащих в вершинах правильного восьмиугольника, если известно, что фальшивые монеты лежат в вершинах равнобедренного треугольника. (*К. Кноп*)

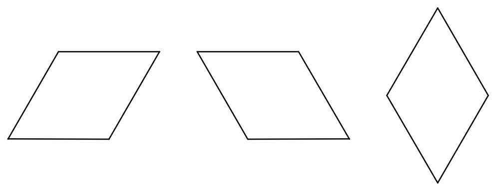
35. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $BC = DE$, $\angle B = \angle ADE$ и $\angle B + \angle E = \angle A$. Докажите, что прямые AB и CE параллельны. (*М. Волчкевич*)

36. На плоскости провели 20 прямых. Какое наибольшее число прямоугольников может быть образовано этими прямыми? (*К. Кноп*)

37. Приведённое квадратное уравнение имеет два различных корня. Могут ли его корни, а также средний и свободный коэффициенты образовывать в некотором порядке арифметическую прогрессию? (*А. Грибалко*)



38. Подставка над плитой представляет собой квадрат, к серединам сторон которого перпендикулярно прикреплены равные отрезки. На рисунке изображена подставка, в которой $KM = 9$ см. Дно кофейника – правильный шестиугольник со стороной 5 см. Кофейник держится на подставке, если у него есть хотя бы три точки опоры. Удастся ли Саше сварить кофе? (*Д. Мухин*)



39. Из плиток в форме ромбиков со стороной 1 и острым углом 60° (см. рисунок) сложили выпуклый шестиугольник. Известно, что количество плиток одного вида равно среднему арифметическому количеств плиток двух других видов. Докажите, что длина одной из сторон шестиугольника равна среднему гармоническому длин двух других его сторон. (*А. Доледенок*)

40. Полную колоду из 36 карт раздали 18 школьникам так, что каждый получил две карты разного достоинства. При этом нет двух таких школьников, чтобы у одного из них были карты такого же достоинства, как и у другого. Докажите, что школьников можно посадить за круглый стол так, чтобы у каждых соседей было по карте одинакового достоинства. (*А. Грибалко*)

Первый тур

41. Вечером каждому шестикласснику в лагере полагается полпакета молока, треть пакета кефира и четверть пакета ряженки. Им выдали 150 пакетов молочных продуктов, и этого не хватило. Потом добавили ещё десять пакетов, и этого хватило с избытком. Сколько шестиклассников в лагере?

42. Четыре жителя острова рыцарей и лжецов собирали грибы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут. По окончании каждый сделал два высказывания.

А: «Я собрал пять грибов. Никто из остальных не собрал один гриб».

Б: «Я собрал шесть грибов. Никто из остальных не собрал два гриба».

В: «Я собрал семь грибов. Никто из остальных не собрал три гриба».

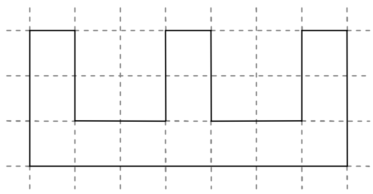
Г: «Я собрал восемь грибов. Никто из остальных не собрал четыре гриба».

Могли ли они вместе собрать ровно 20 грибов? (*К. Кноп*)

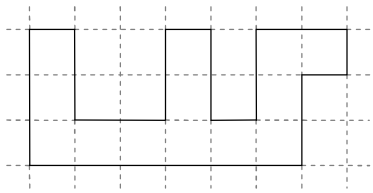
43. Найдите наибольшее **а**) четырёхзначное; **б**) пятизначное число, в котором все цифры различны, а каждая цифра, кроме последней, в целое число раз меньше суммы цифр справа от неё. (*А. Шаповалов*)

44. Каждый из пришедших на ёлку детей знаком ровно с одним мальчиком и ровно с одной девочкой. Сколько детей может быть на ёлке?

45. **а**) На клетчатой плоскости расположена фигура «грабли» с десятью зубцами (на рисунке показан пример «граблей» с тремя зубцами). Какое наибольшее количество непересекающихся прямоугольников 1×3 можно нарисовать по линиям сетки так, чтобы у каждого из них центральная клетка находилась внутри этой фигуры?



б) Та же задача для фигуры, изображённой на рисунке, но у каждого прямоугольника 1×3 либо центральная клетка, либо обе крайние клетки должны находиться внутри этой фигуры. (*П. Закорко*)



46. Треугольник разбили **а**) на 100 треугольников; **б**) на нечётное число треугольников и в каждом из них провели красным цветом одну из медиан. Могли ли все красные отрезки образовать контур многоугольника? (*А. Шаповалов*)

47. Дорога, связывающая пункты А и Б, состоит из нескольких участков с различным дорожным покрытием. В 8:00 из А и Б навстречу друг другу выехали два автобуса, скорости которых на одинаковых покрытиях равны. В момент встречи автобусов навигаторы в них показывали разное расчётное время прибытия в конечные пункты – 9:45 и 10:20 соответственно (навигатор считает, что скорость на оставшейся части пути будет равна средней скорости на уже пройденной части). Когда на самом деле автобусы прибыли в Б и А? (*С. Токарев*)

48. Назовём натуральное число n удобным, если каждое из чисел 1, 2, …, n представимо в виде разности двух делителей числа $2n$.

а) Незнайка утверждает, что число 1000000000 удобное. Прав ли он?

б) Найдите все удобные числа. (*С. Токарев*)

49. В первой лиге, где играют 16 команд разной силы, нужно определить две сильнейшие команды для высшей лиги и две слабейшие для второй лиги. Получится ли это сделать за четыре недели, если в матче всегда побеждает сильнейшая команда и каждый день можно проводить не более одного матча? (*М. Евдокимов*)

50. Натуральное число требуется представить в виде суммы нескольких (возможно, одного) натуральных слагаемых (не обязательно различных). Каких способов больше: в которых все слагаемые нечётны или в которых все слагаемые чётны? Способы, отличающиеся лишь перестановкой слагаемых, считаются одинаковыми. (*А. Тертерян*)

51. У Лёшки и Тошки есть банка с камешками. Однажды Лёшка начал набирать камешки из банки, беря каждый раз самый лёгкий. В какой-то момент он набрал ровно $\frac{2}{3}$ кг, после чего вернул все камешки в банку. На следующий день Тошка тоже начал набирать камешки из банки, следя за тем, чтобы их суммарная масса не превосходила 1 кг. При этом каждый раз он брал самый тяжёлый камешек из тех, которые ещё мог взять. Докажите, что он набрал не меньше $\frac{2}{3}$ кг. (*И. Богданов*)

52. **а**) Девяти мудрецам предложили следующее испытание. Их рассадят в произвольном порядке за круглым столом и раздадут колоду из 36 карт так, что каждый получит четыре карты и будет видеть как свои карты, так и карты остальных мудрецов. Затем раз в минуту все мудрецы одновременно в открытую будут отдавать по одной карте своим соседям. В какой-то момент у каждого мудреца должны оказаться карты одного достоинства. Могут ли они заранее договориться, как им действовать, чтобы гарантированно пройти испытание?

б) Та же задача, но каждый мудрец видит только свои карты, передают карты соседям они взакрытую, а в конце должны одновременно выложить карты на стол. (*А. Грибалко*)

53. Двое играют на клетчатом поле 5×5, окружённом горами. Они по очереди заполняют водой по одной клетке, при этом первый может в любой момент вместо своего хода закончить игру. Заполненные водой клетки образуют озёра (если две соседние по стороне клетки заполнены водой, то они принадлежат одному озеру). Какое наибольшее количество озёр может гарантированно получить первый игрок? (*М. Хачатурян*)

54. Алёна выбрала четыре последовательных натуральных числа. Оказалось, что если второе число приписать справа к первому, то получится такой же результат, как если перемножить третье и четвёртое числа. Найдите все четвёрки чисел, которые могла выбрать Алёна. (*А. Доледенок*)

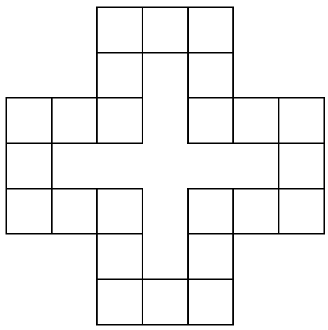
55. **а**) Вася выписал в ряд 2025 двузначных чисел, при этом каждые два соседних числа оказались взаимно просты. Коля хочет покрасить в зелёный цвет 30 выписанных чисел так, чтобы каждые два зелёных числа, между которыми ровно одно зелёное, были взаимно просты. Обязательно ли ему удастся это сделать?

б) Та же задача, но Вася выписал бесконечную последовательность натуральных чисел, меньших 10^{100}, а Коля хочет покрасить в зелёный цвет бесконечно много чисел этой последовательности. (*В. Новиков*)

56. При каком наибольшем N существует покрытие доски 100×100 двухклеточными доминошками без наложений, которое можно однозначно восстановить, даже если убрать любые N доминошек?

57. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC с основанием $AC = 10$ отмечена точка M. Найдите расстояние от вершины B до прямой CM, если углы ACM и BCM равны $18°$ и $36°$ соответственно. (*М. Волчкевич*)

58. За одну операцию можно склеить одну или несколько равных фигурок из имеющихся деталей, каждую фигурку – из двух деталей. В следующих операциях эти фигурки тоже можно использовать как детали. За какое наименьшее число операций можно из 24 одинаковых квадратов склеить фигуру, изображённую на рисунке? (*А. Шаповалов*)



59. Доску 100×100 покрыли без наложений двухклеточными доминошками. Требуется убрать некоторые из них так, чтобы по оставшимся доминошкам можно было однозначно восстановить, как были расположены все доминошки. Какое наибольшее число доминошек можно гарантированно убрать? (*А. Грибалко*)

60. Из одной точки плоскости провели десять красных лучей, из другой – десять синих. Каждый красный луч пересёк каждый синий в точке, отличной от начал лучей. Для каждой такой точки отметили один из образовавшихся при пересечении углов. Какое наибольшее число отмеченных углов могли оказаться равными? (*А. Шаповалов*)

61. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA', BB' и CC'. Обязательно ли этот треугольник равнобедренный, если $A'B + B'C + C'A = AB' + BC' + CA'$? (*С. Токарев*)

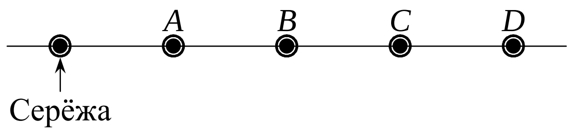
62. Даны действительные числа p и q. Обязательно ли существует такой квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, что $a > 0$, а его график не пересекает прямую $y = f(p)f(q)$? (*Л. Шатунов*)

63. В центрально-симметричном десятиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}$ с центром O все углы, кроме двух при вершинах A_1 и A_6, равны 150°, а все стороны равны 1. Диагонали A_1A_5 и A_2A_6 пересекаются в точке M. Найдите OM. (*М. Евдокимов*)

Второй тур

64. В баскетбольном турнире участвовали десять команд. В каждом туре они разбивались на пары и проводили серии матчей до четырёх побед (ничьих в баскетболе не бывает). Могло ли после трёх туров оказаться, что все команды сыграли разное количество матчей? (*А. Грибалко*)

65. В стокгольмском метро проездной билет действует определённое количество минут. Серёжа купил такой билет и осматривает красивые станции. Ему осталось осмотреть четыре станции (см. рисунок), на осмотр каждой нужна хотя бы минута. Поезда ходят раз в 10 минут и проезжают расстояние между соседними станциями за 3 минуты (временем остановки поезда на станции можно пренебречь). Серёжа заметил, что сейчас как раз одновременно отходят поезда в обе стороны, и сел на поезд в сторону станции A. Может ли он успеть осмотреть все четыре станции за 38 минут? (*М. Хачатурян*)



66. **а**) Сумма нескольких натуральных чисел равна 20. Каково их наибольшее возможное произведение?

б) Из 60 единиц составили выражение, используя операции сложения, умножения и скобки (не объединяя единицы в многозначные числа). Какое наибольшее число могло получиться в результате?

в) Из единиц, используя операции сложения, умножения и скобки (не объединяя единицы в многозначные числа), составили выражение, значение которого – пятизначное число. Какое наименьшее количество единиц могло быть использовано?

67. У Ани есть картонные прямоугольные треугольники с катетами 1 и 2. Какое наибольшее количество таких треугольников она может разместить на клетчатом поле **а**) 6×6; **б**) 2025×2025; **в**) $N \times N$ так, чтобы они не имели общих точек, а их катеты лежали на линиях сетки? (*А. Тутубалина*)

68. Автобус по пути из пункта А в пункт Б сделал 10-минутную остановку. Из-за этого ожидаемое (вычисляемое навигатором) время прибытия в Б увеличилось на 15 минут (навигатор считает, что скорость на оставшейся части пути будет равна средней скорости на уже пройденной части). Какую часть пути проехал автобус до остановки? (*С. Токарев*)

69. В первенстве класса по настольному теннису было три призовых места. Корреспондент школьной газеты спросил семерых учеников этого класса, как звали призёров, и получил такие ответы:

1) Вася, Ульяна, Зоя;
2) Дима, Саша, Ульяна;
3) Рома, Марина, Богдан;

4) Зоя, Женя, Ульяна;

5) Рома, Женя, Богдан;

6) Дима, Марина, Вася;

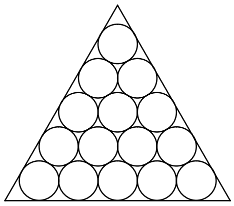
7) Вася, Дима, Саша.

Известно, что только один человек верно назвал всех троих, в двух ответах ровно два имени названы неправильно, а в трёх ответах – все три имени. Как же звали призёров?

70. **а**) Петя составляет восьмибуквенные слова, переставляя буквы в слове ПРИЯТЕЛЬ. Он считает слово удачным, если можно стереть в нём часть букв так, чтобы оставшиеся сомкнулись в слово ПЕТЯ. Найдите количество удачных слов.

б) Игорь и Илон составляют 11-буквенные слова, переставляя буквы в слове ТРЕУГОЛЬНИК. Каждый считает слово удачным, если можно стереть в нём часть букв так, чтобы оставшиеся сомкнулись в его имя. Найдите количество слов, удачных сразу для обоих. (*А. Шаповалов*)

71. Треугольный торт украсили вишенками и клубникой, использовав всего 15 ягод (см. рисунок). Какое наибольшее количество вишенок может быть на торте, если никакие две из них не лежат рядом?



72. **а**) Король клетчатого королевства хочет построить клетчатый замок площадью 6 клеток. Строителям необходимо огородить прямоугольным забором по линиям сетки строительную площадку так, чтобы будущий замок не касался забора. Но строители пока не знают, какой именно формы будет замок. Какой наименьший периметр должен быть у забора, чтобы на огороженной территории поместился замок любой формы?

б) Та же задача, но забор не обязательно должен быть прямоугольным. (*А. Блинков*)

73. **а**) По кругу лежат 36 одинаковых на вид монет. Известно, что среди них есть от трёх до шести фальшивых – они весят одинаково и легче настоящих, при этом все фальшивые монеты лежат подряд. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно выяснить, сколько их? (*К. Кноп*)

б) Та же задача для 72 монет, среди которых от трёх до десяти фальшивых. (*К. Кноп*, *А. Тутубалина*)

74. Требуется расставить n различных натуральных чисел в вершинах n-угольника так, чтобы сумма всех этих чисел делилась на сумму двух чисел на каждой стороне.

а) Можно ли сделать это при $n = 5$?

б) При каком наименьшем n можно это сделать? (*А. Шаповалов*)

75. Трофим выписал все делители числа 1000 по разу и объединил некоторые из них в тройки так, что произведения во всех тройках оказались равны. Каково наибольшее возможное количество троек? (*А. Шаповалов*)

76. Петя записал несколько различных натуральных чисел, среди которых нет последовательных. Вася увеличил каждое Петино число на 1. Оказалось, что произведение Васиных чисел делится на произведение Петиных. Сколько чисел мог записать Петя? (*А. Тутубалина*, *Е. Акилбаева*)

77. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны, а углы при основании равны 75°. Через середину боковой стороны и точку пересечения диагоналей провели прямую. В каком отношении она делит другую боковую сторону? (*Р. Хазанкин*)

78. Верно ли, что для любого натурального числа a существует отличное от него натуральное число b, для которого $a^a \cdot b^b$ – точный квадрат? (*А. Юран*)

79. На отрезке AD отмечены точки B и C, и в одной полуплоскости относительно прямой AD построены равносторонние треугольники AKB, BLC и CMD.

а) Найдите длину отрезка BC, если $AB = 20$, $CD = 25$ и $LK = LM$.

б) Докажите, что если $AB + CD = BC$, то $LK = LM$. (*А. Грибалко*)

80. Найдите все такие наборы неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} = 5050$ и $x_2^2 - x_1^2 = 3,\ x_3^2 - x_2^2 = 5, \ldots,\ x_{100}^2 - x_{99}^2 = 199$.

81. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что $AB = BC = CD$ и $\angle BEC = 135°$. Докажите, что если точка M – середина стороны AD, то прямые BC и ME перпендикулярны.

82. У Пети есть 100 карточек с числами 1, 3, $3^2, \ldots, 3^{99}$, а у Васи – 100 карточек с числами 2, $2^2, \ldots, 2^{100}$. Они по очереди выкладывают по одной карточке на стол. Петя начинает и стремится к тому, чтобы после какого-то хода Васи сумма чисел на двух последних выложенных карточках была простой. Может ли Вася ему помешать? (*М. Евдокимов*)

83. Существует ли треугольник, в котором серединные перпендикуляры к двум сторонам делят биссектрису угла, образованного этими сторонами, на три равные части? (*А. Пешнин*)

84. В ряд лежат 1000 пустых карточек. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно на любой пустой карточке написать букву «а» или «б». Как только все карточки будут заполнены, Петя найдёт в полученном слове палиндром чётной длины и получит от Васи столько рублей, какова длина этого палиндрома. Докажите, что Вася может действовать так, чтобы заплатить не более 8 рублей. (*А. Грибалко*)

85. Площадь описанного четырёхугольника равна произведению каких-то двух его сторон. Обязательно ли этот четырёхугольник – квадрат? (*А. Блинков*)

Третий тур

86. Из квадрата, разбитого на единичные клетки, вырезали клетчатый многоугольник площади 21 и периметра 42. Какой наименьшей длины могла быть сторона квадрата?

87. В доме 5% квартир имеют номера, являющиеся точными квадратами.

а) Какое наибольшее количество квартир может быть в этом доме?

б) Сколько всего квартир может быть в этом доме? (*С. Токарев*)

88. **а**) В забеге участвует команда из двух человек с одним самокатом. Они стартуют одновременно, и каждый должен совершить по заданной трассе полный круг по часовой стрелке. В зачёт идёт время последнего. Каждый сам выбирает точку старта (она же – точка финиша, где надо остановиться). Без самоката каждый пробегает круг за 1 час, а на самокате первый ездит вдвое быстрее, а второй – втрое быстрее, чем бегом. На самокате разрешено ездить только по одному, и можно передавать его друг другу. Какое наименьшее время может показать команда?

б) Та же задача, но в команде три человека, без самоката каждый пробегает круг за 1 час 25 минут, а на самокате первый ездит вдвое быстрее, второй – втрое быстрее, а третий – вчетверо быстрее, чем бегом. (*А. Шаповалов*)

89. Рассмотрим одну из главных диагоналей клетчатого квадрата. Назовём лесенкой фигуру, являющуюся объединением всех клеток, лежащих не выше этой диагонали.

а) Петя подсчитал число клетчатых квадратов (не обязательно единичных) в лесенке высоты 88, а Витя – в лесенке высоты 89. На сколько Витино число больше, чем Петино?

б) Докажите, что число клетчатых квадратов (не обязательно единичных) в лесенке высоты n равно количеству треугольников с целочисленными сторонами, не превосходящими n. (*К. Кноп*)

90. В чайной комнате стоят четыре фигурки: жираф, кот, енот, сова. Каждое утро директор расставляет их в порядке ЖКЕС. У каждого из Ани, Бори и Вани есть две любимые фигурки, которые они, заходя в чайную, меняют местами. В понедельник в чайную сначала зашла Аня, потом Боря, потом Ваня, и фигурки оказались расставлены в порядке СЖКЕ. Во вторник в чайную сначала зашёл Ваня, потом Аня, и фигурки оказались в порядке КЖСЕ. В среду в чайную сначала зашёл Боря, потом Аня, потом Ваня, потом опять Боря. Как после этого были расставлены фигурки? (*В. Клепцын*)

91. Иван Иванович на 15 лет младше Семёна Семёновича, которому не больше 120 лет. Возраст Ивана Ивановича в 6 раз больше, чем сумма цифр возраста Семёна Семёновича. Сколько лет каждому из них? (*А. Блинков*)

92. **а**) В ряд стоят коробки, пронумерованные 1, 2, … слева направо. В них кладут по порядку числа 1, 2, …, 2025. Очередное число кладётся в самую левую коробку, где нет его делителей. В какую коробку попадёт число 2025?

б) В какое наименьшее количество цветов можно раскрасить числа 1, 2, …, 2025 так, чтобы числа одинакового цвета друг на друга не делились? (*А. Шаповалов*)

93. **а**) Было шесть одинаковых на вид монет, две из которых фальшивые – они весят одинаково и легче настоящих. Две монеты потерялись. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, сколько настоящих среди потерянных монет?

б) Было 13 одинаковых на вид монет, две из которых фальшивые – они весят одинаково и легче настоящих. Одна из монет потерялась. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, является ли потерянная монета настоящей? (*К. Кноп*)

94. К левому берегу реки подошли n человек с номерами 1, 2, …, n. Они хотят с помощью двухместной лодки переправиться на правый берег так, чтобы в каждый момент, когда все находятся на берегах, сумма номеров на одном из берегов делилась на сумму номеров на другом.

а) Возможно ли это при $n = 15$?

б) При каком наибольшем n это возможно? (*А. Грибалко*)

95. По кругу стоят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Каждый заявил: «Среди четырёх человек – двоих ближайших ко мне справа и двоих ближайших слева – ровно один рыцарь». Сколько рыцарей может быть в круге, если всего в нём **а**) 20 человек; **б**) 31 человек? (*А. Грибалко*)

96. В 1 «А» классе 15 мальчиков и 15 девочек, а в кабинете три ряда по пять парт в каждом. Мария Ивановна хочет, чтобы за каждой партой сидели мальчик с девочкой, но нужно учесть, что шесть мальчиков и шесть девочек не могут сидеть дальше третьей парты. Сколькими способами можно рассадить детей? (*И. Эльман, М. Серенко*)

97. В безумный магазин керамики завезли новые квадратные плитки. Размеры плиток одинаковы, но их края бывают прямыми или волнистыми. Соединять плитки можно только одинаковым типом сторон: прямую к прямой, волнистую к волнистой. Также на плитках есть рисунок, поэтому поворачивать их нельзя. Дизайнер может заказать в магазине определённое количество различных видов плиток. Однако магазин сам решает, какие виды плиток прислать, при этом плиток каждого вида он готов отправить бесконечно много. Какое наименьшее количество видов плиток должен заказать дизайнер, чтобы наверняка замостить бесконечный пол в магическом замке? (*А. Зайцева*)

98. На диагональ AC прямоугольника $ABCD$ опущены перпендикуляры BB' и DD'. Докажите неравенство $B'D' \geq |AB - AD|$. (*С. Токарев*)

99. Есть пластиковый квадрат, который можно класть на бумагу и обводить по контуру.

а) На бумаге нарисован угол с вершиной A. Постройте отрезок AL, где L – какая-нибудь точка на биссектрисе данного угла.

б) На бумаге отмечены две точки A и B. Постройте точки, делящие отрезок AB на n равных частей. (*А. Тутубалина*)

100. **а**) Из бумаги вырезано 100 единичных квадратов. В каждом из них две стороны покрашены красным цветом, а две другие – синим. Всегда ли из этих квадратов можно сложить квадрат 10×10 так, чтобы каждые два соседних квадрата соприкасались сторонами разных цветов?

б) Из бумаги вырезано 100 равносторонних треугольников со стороной 1. Стороны каждого из них покрашены в три цвета: красный, жёлтый и зелёный. Всегда ли из этих треугольников можно сложить равносторонний треугольник со стороной 10 так, чтобы каждые два соседних треугольника соприкасались сторонами одного цвета? Переворачивать треугольники нельзя. (*А. Грибалко*)

101. Докажите, что если $a \geq 4$, $b \geq 5$, $c \geq 6$ и $a^2 + b^2 + c^2 \geq 90$, то $a + b + c \geq 16$.

102. На доске 15×15 стоят ладьи. Известно, что каждая ладья за несколько ходов может съесть любую другую, двигаясь только по свободным клеткам. Докажите, что ладей меньше 150. (*А. Грибалко, Н. Наконечный*)

103. Даны различные ненулевые числа a, b, c, сумма которых равна нулю. Какие значения может принимать выражение $\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)$? (*С. Токарев*)

104. Медианы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точка X – проекция точки M на прямую, проходящую через точку A и параллельную прямой BC. Докажите, что $\angle BXC_1 = \angle CXB_1$. (*А. Доледенок, А. Соколов*)

Финал

105. Клетчатый многоугольник разрезали на два клетчатых многоугольника. Для каждого из них, включая исходный, нашли, на какое наименьшее число полосок шириной в одну клетку можно его разбить. Могло ли оказаться, что одно из полученных чисел больше суммы двух других? (*А. Грибалко*)

106. В комнате находятся десять человек. У одного из них ровно четыре знакомых в этой комнате, а у остальных – больше. Докажите, что найдётся тройка человек, в которой каждый знаком с двумя остальными.

107. По кругу записали числа 1, 2, …, n в некотором порядке и для каждого числа подсчитали сумму его соседей. Оказалось, что эти суммы являются последовательными числами, взятыми в некотором порядке.

а) Возможно ли это при $n = 100$?

б) При каких $n > 2$ это возможно? (*А. Пешнин*)

108. В ряду десять парт, за каждой из которых сидят два ученика. Учитель составил шесть вариантов контрольной работы. Сколькими способами он может раздать варианты так, чтобы никому не достался такой же вариант, как у соседа по парте или как у сидящего точно перед ним ученика?

109. **а**) Лиса испекла 12 одинаковых на вид пирожков: шесть с капустой и шесть с мясом. Она разложила их по кругу в произвольном порядке, при этом заяц знает, где какой пирожок. После этого пришёл волк, и они с зайцем стали по очереди есть пирожки, начиная с зайца. Им запрещено общаться или обмениваться какими-либо знаками. Могли ли они заранее договориться действовать так, чтобы в итоге заяц съел все пирожки с капустой, а волк – все с мясом?

б) В квадратной коробке 6×6 находятся 36 одинаковых на вид конфет, каждая из них лежит в своей ячейке. У половины конфет внутри карамельная начинка, у другой половины – джем, и Малыш знает их первоначальное положение. Фрёкен Бок в присутствии Малыша перемешала конфеты в коробке. Затем Малыш съел одну конфету, а Фрёкен Бок как-то повернула коробку. После этого к ним в гости прилетел Карлсон, и они с Малышом стали по очереди есть конфеты, начиная с Карлсона. Им запрещено общаться или обмениваться какими-либо знаками. Могли ли они заранее договориться действовать так, чтобы в итоге Карлсон съел все 18 конфет с джемом? (*А. Грибалко*)

110. В восьмиэтажном теремке живут антилопа, барсук, варан, гадюка, дятел, ёж, жаба, зимородок, игуана, крот, ленивец, манул, неясыть, опоссум, попугай и рысь. На каждом этаже живут двое животных. Также известно, что

1) антилопа живёт на два этажа ниже барсука и на три этажа выше попугая;
2) барсук живёт на шесть этажей выше варана;
3) гадюка и жаба – соседи;
4) манул живёт на четыре этажа выше неясыти и на два этажа ниже гадюки;
5) опоссум живёт над неясытью;
6) рысь живёт на пять этажей ниже жабы.

На каком этаже живёт антилопа?

111. Каждую цифру обозначили некоторой буквой. Чему может быть равно число АНАНАС, если и оно, и число БАНАН делятся на 8? (*С. Токарев*)

112. За круглым столом сидят 33 богатыря, все они очень умны. Дядька Черномор раскрасил их шлемы в красный, синий и жёлтый цвета. Каждый богатырь видит цвета всех шлемов, кроме своего. Черномор сообщил им, что ни у каких соседей цвета шлемов не совпадают, после чего в каком-то порядке спросил каждого богатыря один раз, знает ли тот цвет своего шлема. Какое наибольшее количество ответов «Нет» он мог получить? (*А. Грибалко*)

113. Саша рисует на листе бумаги прямоугольники (возможно, пересекающиеся). Какое наименьшее количество прямоугольников он должен нарисовать, чтобы на листе получилось изображение квадрата 10×10, разбитого на единичные квадраты? (*А. Грибалко*)

114. Есть куча из 100 карточек с числами 1, 2, …, 100 и **а**) восемь коробок; **б**) девять коробок. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно переложить любую карточку из кучи в какую-нибудь коробку. Когда куча закончится, в каждой коробке будет подсчитана сумма чисел на карточках. Если одна из сумм разделится на другую, то выигрывает Вася, иначе – Петя. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

115. **а**) Кощей купил квадратный участок 22×22, разбитый на единичные квадраты. Он хочет построить точечный бункер в узле сетки и окружить его замкнутыми заборами длины 88, не имеющими общих точек и идущими по линиям сетки. Какое наибольшее количество заборов ему удастся построить?

б) Кощей купил квадратный участок $N \times N$, разбитый на единичные квадраты. Он хочет построить точечный бункер в узле сетки и окружить его семью замкнутыми заборами одинаковой длины, не имеющими общих точек и идущими по линиям сетки. При каком наименьшем N это возможно? (*А. Шаповалов*)

116. Для кота припасено больше 20, но меньше 50 одинаковых пакетиков корма. Некоторые пакетики куплены по полной цене, а остальные – с 30-процентной скидкой. Известно, что денег на эти части потрачено поровну. Сколько всего пакетиков припасено? (*С. Токарев*)

117. **а**) На доске 9×9 находится невидимый уголок, покрывающий три клетки. Разрешается производить выстрел в любую клетку. Если выстрел не попал в уголок, то после него уголок поворачивается на 90° (в любом направлении) вокруг точки, которая принадлежит всем трём его клеткам. За какое наименьшее количество выстрелов можно гарантированно попасть в уголок?

б) Та же задача, но нельзя стрелять в одну и ту же клетку более одного раза.

в) Задача б) для доски 7×7. (*А. Грибалко*)

118. Существуют ли два натуральных числа, отличающихся ровно в 7 раз, десятичные записи которых получаются друг из друга циклическим сдвигом? (*А. Тертерян*)

119. Петя загадал натуральное число. Раз в минуту Вася называет любое натуральное число, и если оно совпало с тем, которое в этот момент у Пети в голове, то он победил и игра заканчивается. Иначе Петя по своему усмотрению умножает или делит текущее число на 2, но делить можно только чётные числа. Может ли Вася действовать так, чтобы гарантированно победить за конечное время? (*А. Грибалко*)

120. На катете BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C отмечена точка K. Точка M – середина отрезка AK.

а) Найдите угол CAK, если $BM = AC$.

б) Докажите, что если $\angle CAK = 15°$, то $BM = AC$. (*М. Волчкевич*)

121. Для натуральных чисел m и n выполняется равенство $m(2m+3) = n^7 - 1$. Докажите, что число $3m+3$ представимо в виде суммы трёх различных седьмых степеней натуральных чисел. (*А. Пешнин*)

122. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ выбраны точки E и F соответственно. Докажите, что если $AB + BE = AD + DF$, то биссектриса угла A перпендикулярна прямой EF.

123. Назовём натуральное число N особенным, если в его десятичной записи встречаются только две различные ненулевые цифры, а число $9N$ представимо в виде разности кубов двух натуральных чисел. Докажите, что особенных чисел бесконечно много. (*М. Евдокимов*)

124. Есть бесконечное количество единичных кубиков, на всех гранях каждого из которых написаны какие-то натуральные числа. Докажите, что из некоторых кубиков можно сложить куб так, чтобы сумма всех чисел на его поверхности делилась на 2025.

125. Можно ли разрезать треугольник на выпуклые пятиугольники? (*М. Волчкевич*)

126. Есть бесконечная в обе стороны клетчатая полоска. На одной из клеток лежат 4^n фишек, где n – натуральное число, остальные клетки пусты. За один ход разрешается взять из любой клетки некоторое количество фишек и переместить их влево или вправо на столько клеток, сколько фишек перемещается. Докажите, что не более чем за $6n-2$ хода можно переместить все фишки на клетку, соседнюю с той, где они находятся изначально. (*А. Шаповалов, К. Кноп*)

127. На окружности отметили 20 точек и провели 21 отрезок с концами в этих точках. Докажите, что какие-то три отрезка образуют ломаную, не имеющую самопересечений.

128. Зафиксированы окружность и её хорда BC. Точка A движется по большей дуге BC этой окружности, точки P и Q – основания перпендикуляров, опущенных из точки A на биссектрисы внешних углов ABC и ACB. Докажите, что описанная окружность треугольника APQ касается фиксированной окружности. (*Д. Прокопенко*)

129. Докажите, что уравнение $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{100}{x^2 + y^2 + z^2}$ не имеет решений в целых числах. (*С. Токарев*)

130. Докажите, что для любого натурального k существует начальный отрезок натурального ряда, в котором чисел, содержащих цифру 7 в десятичной записи, ровно в k раз больше, чем остальных. (*А. Грибалко*)

131. Сэм хочет заключить с Джоном пари на α тысяч долларов. Джон нарисует на клетчатой плоскости по линиям сетки пять прямоугольников, имеющих общую клетку. Сэм покрасит один из них в красный цвет, а другой – в синий. Затем он вычислит отношение периметра пересечения красного и синего прямоугольников к периметру красного. Если это отношение окажется не меньше α, то Сэм выиграет пари. Какое максимальное α он может назвать, чтобы гарантированно выиграть? (*И. Богданов*)