XXIX турнир математических боёв имени А.П. Савина

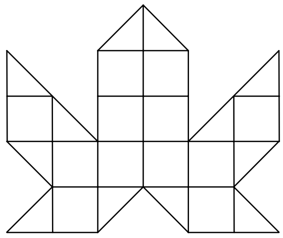
База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2024 года

Личная олимпиада

1. **а**) Решите систему ребусов КР + ОТ = 51, КО + РТ = 123.

б) В клетках таблицы 2×2 написаны четыре различные ненулевые цифры. Ваня прочитал слева направо два двузначных числа в строках, сложил их и получил 51. А Глеб прочитал сверху вниз два двузначных числа в столбцах, сложил их и получил 123. Какие цифры написаны в таблице? (*Г. Минаев*)

2. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на шесть равных частей. (*И. Русских*)



3. Костя, Миша и Антон сыграли несколько партий в настольный теннис. Если кто-либо играл две партии подряд, то уступал место за столом, иначе место уступал проигравший в последней партии (ничьих в теннисе не бывает). В итоге Антон сыграл меньше всех партий, а Миша участвовал в 15 партиях. Сколько всего партий сыграли ребята? (*М. Евдокимов*)

4. Максу и Нелли выдали по одному и тому же натуральному числу. Макс каждым ходом увеличивал своё число на его наибольшую цифру, а Нелли увеличивала своё число на наименьшую цифру. Оба сделали **а**) одинаковое количество ходов; **б**) по пять ходов. Могло ли в итоге число у Нелли оказаться больше, чем у Макса? (*А. Шаповалов*)

5. В клетчатом **а**) квадрате 5×5; **б**) прямоугольнике 20×24 требуется закрасить некоторые (но не все) клетки так, чтобы ни в каком квадрате 2×2 не было закрашено ровно три клетки. Какое наибольшее количество клеток можно закрасить? (*Е. Горская*)

6. **а**) В ряд лежат пять монет массой 4 г и пять монет массой 5 г, все они выглядят одинаково. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь проверить, чередуются массы монет или нет?

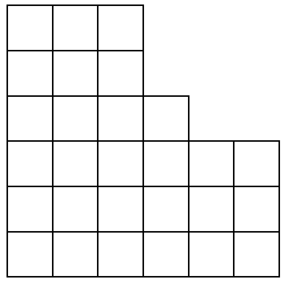
б) Та же задача для десяти монет массой 9 г и десяти монет массой 10 г, лежащих по кругу. (*К. Кноп*)

7. Маше, Саше, Паше и Даше подарили по нескольку конфет. Маша решила, что ей досталось слишком много: она оставила себе две конфеты, а остальные разделила на три равные части и раздала другим. После этого Саша решил, что ему досталось много: он оставил себе две конфеты, а остальные раздал другим поровну. Затем то же самое сделал Паша. Даша решила восстановить справедливость: она оставила себе несколько конфет, а остальные раздала другим поровну. В итоге у каждого оказалось столько же конфет, сколько было в самом начале. Сколько конфет изначально получил каждый, если всего им подарили **а**) 16 конфет; **б**) 24 конфеты? (*И. Русских*)

8. Клетчатый квадрат **а**) 7×7; **б**) 11×11 разрезали по границам клеток на части и сложили из них центрально-симметричный крест, образованный двумя равными прямоугольниками шириной в одну клетку. Каково наименьшее возможное количество частей? (*А. Шаповалов*)

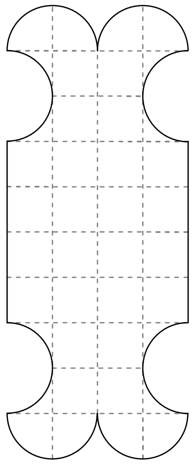
9. У трёх хамелеонов было по шесть шариков, каждый из которых окрашен в один из трёх цветов. Хамелеон всегда окрашен в тот цвет, шариков которого у него больше всего (если таких цветов несколько, то хамелеон может быть окрашен в любой из них). Сначала все хамелеоны были красными, но после того как первый хамелеон отдал один шарик второму, все поменяли свой цвет. Затем второй хамелеон отдал третьему один шарик другого цвета, и все снова стали красными. Сколько всего красных шариков у хамелеонов? (*М. Хачатурян*)

10. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, по линиям сетки на четыре равные части. (*Н. Чернятьев*)



11. Возрасты Саши и Вани двузначны, при этом Саша старше на 15 лет. Сколько лет каждому, если сумма квадратов цифр возраста Вани на 1 больше суммы квадратов цифр возраста Саши? (*А. Грибалко*)

12. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на восемь равных частей. (*Т. Голенищева-Кутузова*)



13. На каждой клетке шахматной доски лежит по зерну. Если в двух клетках с общей стороной зёрен поровну, то можно переложить все зёрна из одной клетки в другую.

а) Можно ли такими операциями собрать все зёрна в одной клетке?

б) Какое наибольшее количество зёрен можно собрать такими операциями в одной клетке? (*А. Шаповалов*)

14. Миллионер решил сберечь свои капиталы и открыл в банках вклады на 10 млн, 11 млн, …, 30 млн рублей. Через год каждый вклад увеличился на натуральное число процентов (не обязательно одинаковое), и теперь суммы на них снова являются последовательными натуральными числами миллионов (возможно, в другом порядке). Верно ли, что за год миллионер стал миллиардером? (*А. Пешнин*)

15. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC как на гипотенузах построены внутрь равнобедренные прямоугольные треугольники ADB и BEC. Докажите, что $AE = ED = DC$. (*И. Русских*)

16. В групповом этапе Лиги чемпионов четыре команды играют в два круга. За победу начисляется 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Из группы выходят две команды, набравшие больше очков, чем две другие. При равенстве очков у нескольких команд места определяются по сумме очков, набранных во встречах между ними. Если и эти показатели равны, то бросается жребий. Может ли случиться так, что какая-то команда обеспечит себе выход из группы после первого круга? (*А. Заславский*)

17. Таблица 4×4 заполнена различными натуральными числами от 1 до 16. Петя выбрал одно из чисел и нашёл сумму семи чисел, стоящих с ним в одной строке или в одном столбце (включая выбранное число). Вася выбрал другое число и нашёл для него аналогичную сумму. Может ли результат одного из них быть ровно в 3 раза больше, чем у другого? (*М. Евдокимов*)

18. На стороне CD и диагонали BD квадрата $ABCD$ отметили точки M и N соответственно так, что $\angle DAM = \angle NAM = 15°$. Докажите, что **а**) $CM = CN$; **б**) $AM = 2DN$. (*М. Волчкевич*)

19. По кругу стоят 120 человек. На вопрос «Ты знаком с левым соседом?» ровно половина ответила «Да». Докажите, что можно выбрать 20 человек и поставить их по кругу так, чтобы на вопрос «Ты знаком ровно с одним из двух твоих соседей?» ровно половина ответила «Да». (*А. Шаповалов*)

20. Равносторонний треугольник ABC и квадрат $ADEF$ вписаны в одну окружность. Отрезок BC пересекает отрезки DE и FE в точках P и Q (точка P лежит между B и Q). Что больше: длина отрезка PQ или сумма длин отрезков BP и CQ? (*А. Блинков*)

21. Существует ли трапеция, которую можно разбить на девять равных трапеций, ей подобных? (*А. Блинков*)

22. У математика есть 100 гирь, массы которых равны 1, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, …, $\frac{1}{100^2}$ кг, и абсолютно точные двухчашечные весы. Может ли он положить по пять гирь на каждую чашу весов так, чтобы установилось равновесие? (*М. Евдокимов*)

Командная олимпиада и нулевой тур

23. **а**) Из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми 20 км, вышел турист со скоростью 4 км/ч. В это же время навстречу из пункта Б вылетела муха со скоростью 10 км/ч. Долетев до туриста, она поворачивает и летит обратно в Б, потом снова поворачивает и летит навстречу туристу и так далее, пока турист не придёт в Б. По направлению из А в Б дует ветер со скоростью 2 км/ч – он влияет на скорость мухи, но не на скорость туриста. Сколько километров пролетит муха?

б) Из пунктов А и Б, расстояние между которыми 24 км, одновременно навстречу друг другу вышли два туриста со скоростями 5 км/ч и 3 км/ч соответственно. В это же время из пункта Б вылетела муха со скоростью 10 км/ч. Долетев до первого туриста, она поворачивает и летит обратно до встречи со вторым туристом, потом снова поворачивает и летит навстречу первому и так далее, пока туристы не встретятся. По направлению из А в Б дует ветер со скоростью 2 км/ч – он влияет на скорость мухи, но не на скорости туристов. Сколько километров пролетит муха? (*Л. Смирнова*)

24. **а**) Петя утверждает, что вырезал из полоски шириной 3 клетки многоугольник из 24 клеток, которым полностью обернул куб $2 \times 2 \times 2$. Может ли это быть правдой? (*Т. Казицына*)

б) Та же задача для полоски шириной 2 клетки. (*Т. Казицына, А. Грибалко*)

25. На левом берегу реки собралось несколько рыцарей, каждый со своим оруженосцем. Есть двухместная лодка. Оруженосцы отказываются оставаться с незнакомыми рыцарями без своих хозяев (но могут оставаться совсем без рыцарей). Посреди реки есть бакен, на котором может сидеть один человек.

а) Как им всем переправиться на правый берег, если рыцарей четверо?

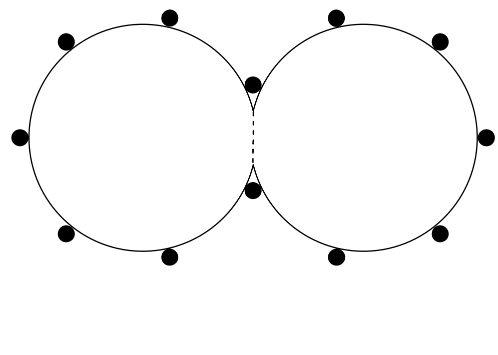
б) Докажите, что все они смогут переправиться на правый берег. (*А. Шаповалов*)

26. Петя красит клетки квадрата 8×8 в 32 цвета, по две клетки в каждый цвет. Затем Вася выбирает ряд – строку или столбец квадрата. Петя даёт Васе столько конфет, сколько цветов использовано для окраски этого ряда. Какое наибольшее число конфет может наверняка получить Вася? (*А. Шаповалов*)

27. Имеется 18 карточек с цифрами 1, 2, …, 9, по две карточки с каждой, а также девять карточек с запятыми. Можно ли сложить из всех карточек девять десятичных дробей, которые при округлении до ближайшего целого дадут числа 1, 2, …, 9 (полуцелые числа округляются в большую сторону)? (*А. Шаповалов*)

27. Два эльфа считаются ровесниками, если их возрасты отличаются меньше чем на 5 лет.

а) За круглым столом сидят 20 эльфов так, что каждая пара соседей – ровесники. Докажите, что можно посадить их за два круглых стола по десять эльфов так, чтобы каждые два соседа по-прежнему были ровесниками.



б) Докажите, что в аналогичной задаче для 50 эльфов можно посадить их за пять круглых столов по десять эльфов.

в) За круглым столом сидят 12 эльфов так, что каждая пара соседей – ровесники. Докажите, что можно посадить их за стол в виде «восьмёрки» (см. рисунок) так, чтобы каждые два соседа по-прежнему были ровесниками. (*А. Шаповалов*)

29. На столе лежат **а**) пять кусков бумаги; **б**) шесть кусков бумаги. Известно, что площадь каждого куска больше половины площади стола. Докажите, что все куски можно прикрепить к столу двумя кнопками. (*В. Дольников*)

30. В ряд стоят 100 жителей острова рыцарей и лжецов. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут. Каждый заявил, что если он уйдёт, то в оставшемся ряду у каждого рыцаря будет сосед лжец. При каком наибольшем количестве рыцарей такое возможно? (*А. Грибалко*)

31. На доске написаны два натуральных числа: синее и красное. У Пети есть своё любимое натуральное число. Он нашёл его НОД с синим числом и его НОК с красным. Оказалось, что если к первому результату добавить красное число, а ко второму – синее, то суммы будут равны. Докажите, что красное число делится на синее. (*А. Пешнин*)

32. Сумма нескольких (не менее двух) натуральных чисел делится на квадрат каждого из них. Докажите, что среди этих чисел есть равные.

33. Точка M лежит на гипотенузе AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, а точка N – на её продолжении за точку C так, что $\angle ABM = 30°$ и $\angle CBN = 15°$. Докажите, что $AM = CN$. (*А. Заславский*)

34. По кругу лежат n монет массой 9 г и n монет массой 10 г, все они выглядят одинаково. Известно, что монеты каждой массы лежат подряд. Требуется за два взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, где проходят границы между монетами разной массы.

а) Можно ли сделать это при $n = 5$?

б) При каком наибольшем n можно это сделать? (*К. Кноп*)

35. Можно ли клетки квадрата 15×15 раскрасить в четыре цвета так, чтобы количества клеток каждых двух цветов отличались не более чем на 1, а в каждом ряду (строке или столбце) встречались клетки не более чем двух цветов? (*А. Шаповалов*)

36. В неравнобедренном треугольнике ABC серединный перпендикуляр к биссектрисе угла A пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Что больше: сумма длин отрезков AP и AQ или полусумма длин AB и AC? (*А. Пешнин*)

37. Клетки таблицы **а**) 3×33; **б**) 4×33 раскрашены в белый и чёрный цвета. Саша перекрасил наименьшее необходимое количество клеток в противоположный цвет так, чтобы каждый квадрат 2×2 содержал чётное число белых клеток. Какое наибольшее количество клеток мог перекрасить Саша? (*А. Грибалко*)

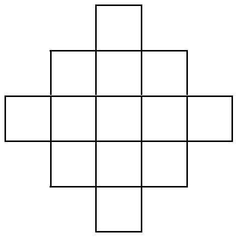
38. Докажите, что если $0 < a < b < c$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$, то $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$. (*Р. Женодаров*)

39. На доске написано число 30!. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход Петя может уменьшить текущее число на 3, 4 или 5, а Вася – разделить на 3, 4 или 5. Нельзя получать отрицательные и дробные числа. Выигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

40. Назовём натуральное число особым, если в десятичной записи его квадрата цифры идут в неубывающем порядке. Существуют ли два последовательных 100-значных особых числа? (*А. Грибалко*)

41. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. На ω_1 отмечена точка C, а на ω_2 – точка D так, что $\angle BAC = \angle BAD$. Касательные к ω_1 в точках B и C пересекаются в точке P, а касательные к ω_2 в точках B и D – в точке Q. Докажите, что прямая AB проходит через середину отрезка PQ. (*Л. Шатунов, И. Кухарчук*)

Первый тур



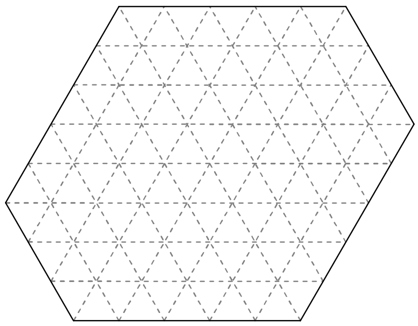
42. На каждой клетке доски, изображённой на рисунке, стоит рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда врёт. Соседями считаются люди, стоящие в клетках с общей стороной. Все сказали: «Большинство моих соседей – моего типа». Какое наибольшее количество лжецов может стоять на доске? (*О. Данченко*)

43. По каркасу единичного куба ползают муравьи. Они могут как угодно менять скорость и стоять на месте, но не могут находиться на расстоянии меньше 1 (по каркасу) друг от друга. При каком наибольшем количестве муравьёв каждый сможет побывать во всех вершинах куба? (*Т. Голенищева-Кутузова*)

44. На ленте написали числа натурального ряда без пробелов: 123456789101112… Данил нашёл самую левую пару двоек, между которыми ровно **а**) 30 цифр; **б**) 22 цифры, среди которых нет двоек. Какие цифры стоят между этими двойками? (*А. Шаповалов*)

45. **а**) Перед экспертом и судьёй лежат девять гирек массами 4 г, 5 г, …, 12 г. Эксперт знает массы всех гирек, а судья знает, что массы именно такие, но не знает, какая гирька сколько весит. Судья берёт по очереди каждую гирьку и кладёт её на одну из чаш весов, а эксперт в ответ должен взять какие-то две гирьки и тоже положить их на весы. Результат взвешивания фиксируется, и гирьки снимаются с весов. Может ли эксперт действовать так, чтобы после девяти взвешиваний судья узнал массы всех гирек?

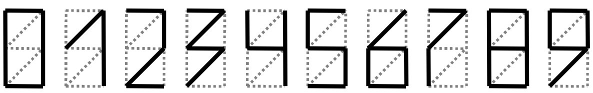
б) Та же задача для 20 гирек массами 10 г, 11 г, …, 29 г и 20 взвешиваний. (*К. Кноп*, *А. Грибалко*)



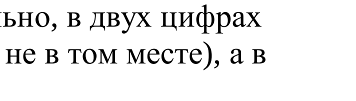
46. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, по линиям сетки на 11 равных частей. (*К. Кноп*)

47. Вася обозначил каждую цифру некоторой буквой и записал четыре простых числа: ЛЕВ, ПЁС, ВОЛК, ПЕСЕЦ. Найдите хотя бы два различных простых делителя суммы этих чисел. (*О. Данченко*)

48. Почтовый индекс состоит из шести цифр, нарисованных чёрточками – сторонами или диагоналями клеток, как показано на образце:



Таня написала индекс, но только одну цифру написала правильно, в двух цифрах сделала по одной ошибке (то есть по одной чёрточке нарисовала не в том месте), а в остальных трёх цифрах – по две ошибки (по две чёрточки нарисовала не в тех местах). Количество чёрточек везде верное. На рисунке показано, что у неё получилось. Какой был правильный индекс? (*Т. Корчемкина*)



49. **а**) В музей выстроилась очередь из 1000 человек. У каждого на руке записан его номер в очереди. Сегодня в музее действует акция: если сумма номеров у двух человек является точным квадратом, то они могут пройти вместе по одному билету. Какого наименьшего количества билетов достаточно, чтобы все желающие попали в музей?

б) На конференцию приехали N участников, которым выдали различные номера от 0 до $N-1$. Организаторы решили поселить участников в отеле по такому принципу: в одноместную комнату можно селить только одного участника, удвоенный номер которого является точным квадратом, а в двухместную – двух участников, сумма номеров которых является точным квадратом. Докажите, что если количество одноместных и двухместных комнат в отеле не ограничено, то такое расселение возможно при любом N.

в) В условиях пункта б) при любом ли N организаторы справятся со своей задачей, если в отеле свободны всего две одноместные комнаты, а количество двухместных комнат не ограничено? (*А. Грибалко*)

50. Можно ли в вершинах **а**) 100-угольной пирамиды; **б**) 50-угольной призмы расставить натуральные числа так, чтобы сумма чисел на каждой грани была простой? (*А. Грибалко*)

51. В классе не более 25 учеников, и они посещают математический, физический и литературный кружки. Число учеников, посещающих математический кружок, кратно числу учеников, посещающих литературный, которых, в свою очередь, в 5 раз меньше, чем посещающих физический. Если число членов математического кружка увеличится в 4 раза, то их станет на 21 больше, чем посещающих физический. Верно ли, что в классе есть **а**) ученик, который посещает не менее двух кружков; **б**) по крайней мере два ученика, которые посещают не менее двух кружков?

52. В стране несколько городов, соединённых железными и автомобильными дорогами. От каждого города можно доехать до любого другого. Из каждого города выходят дороги обоих видов, суммарно не менее трёх. Переменчивый Вася хочет в каждом городе менять вид транспорта. Верно ли, что он всегда сможет добраться от каждого города до любого другого? (*Т. Корчемкина*)

53. Вова готовился к турниру и решал задачи. Каждый день с 1 по 26 июня он записывал на доску количество решённых им в этот день задач. Оказалось, что каждое из этих 26 чисел, кроме крайних, равно разности двух его соседей. Известно, что 5 и 24 июня Вова решил по пять задач. Сколько всего задач решил Вова за время подготовки? (*Т. Казицына*)

54. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята точка K, а на стороне CD – точки L и M (точка L лежит между C и M). Докажите, что $\angle AMK + \angle KLB = \angle DAM + \angle MKL + \angle LBC$. (*Д. Калинин*)

55. Барон Мюнхгаузен утверждает, что в десятичной записи числа **а**) 500!; **б**) 600! все десять цифр встречаются одинаковое количество раз. Не ошибается ли он? (*А. Грибалко*)

56. Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить на шахматной доске, чтобы каждая четырёхклеточная фигурка в виде буквы Т содержала хотя бы одну закрашенную клетку? (*А. Грибалко*)

57. Вписанная окружность треугольника $A_1A_2A_3$ касается сторон A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 в точках K_1, K_2, K_3 соответственно. Точки I_1, I_2, I_3 – центры вписанных окружностей треугольников $A_1K_2K_3$, $A_2K_3K_1$, $A_3K_1K_2$ соответственно. Докажите, что прямые I_1K_1, I_2K_2 и I_3K_3 пересекаются в одной точке.

58. Даны окружность с центром O и вписанный в неё остроугольный треугольник. С помощью только линейки без делений постройте высоту треугольника. (*А. Блинков*)

59. Положительные числа a и b таковы, что числа $\sqrt{2a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}+\sqrt{2b}$ рациональны. Докажите, что число $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ иррационально.

Второй тур

60. **а**) В клетках полоски 1×9 лежат по порядку карточки с числами 1, 2, …, 9. За один ход разрешается переложить одну карточку в соседнюю клетку – пустую или занятую одной карточкой. При этом суммы во всех непустых клетках должны оставаться различными. Можно ли переставить карточки в обратном порядке?

б) В клетках полоски $1\times n$ лежат по порядку карточки с числами 0, 1, …, $n-1$. За один ход разрешается переложить одну карточку в соседнюю клетку – пустую или занятую одной карточкой. При этом суммы во всех непустых клетках должны оставаться различными. При каких n можно переставить карточки в обратном порядке?

в) Та же задача для карточек с числами 1, 2, …, n. (*А. Шаповалов*)

61. В каждой клетке таблицы 3×3 лежит монета. Все монеты выглядят одинаково, однако две из них фальшивые – они весят 9 г и 11 г, а остальные монеты настоящие – весят по 10 г каждая. Также известно, что фальшивые монеты лежат в соседних по стороне клетках.

а) Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить массу каждой монеты?

б) За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить массу каждой монеты? (*А. Грибалко*)

62. В клетках таблицы 6×6 расставили по 12 двоек, троек и пятёрок. Обязательно ли найдётся ряд (строка или столбец), в котором произведение чисел делится на 50? (*А. Шаповалов*)

63. На квадратном континенте все страны прямоугольны. Две страны считаются соседями, если имеют общий отрезок границы. Назовём страну влиятельной, если у неё не меньше десяти соседей. Могут ли не менее **а**) четверти всех стран; **б**) трети всех стран быть влиятельными? (*А. Шаповалов*)

64. На доске написали несколько цифр, каждая из которых равна количеству написанных цифр, не равных ей. Какое наибольшее количество различных цифр могло быть написано? (*А. Заславский*)

65. Боксёр Вася подсчитывает долю выигранных боёв, в которых он участвовал. Перед последним турниром у Васи была выиграна ровно четверть боёв, при этом не было ни одной ничьи. После турнира у него была проиграна ровно четверть боёв. Докажите, что если в этом турнире Вася выиграл все бои, то их число делится на 8.

66. По кругу написали 11 натуральных чисел (не обязательно различных). Известно, что одно из чисел равно 2, а сумма каждых пяти идущих подряд равна 16 или 17. Какие числа могут быть в круге? (*Е. Новодворская*)

67. На доске, изображённой на рисунке, нужно расставить несколько коней. В клетках с числами указано, сколько коней должно бить соответствующую клетку, при этом каждый конь должен бить хотя бы одну из этих клеток. Сколько существует требуемых расстановок? (*А. Грибалко*)

					2					
				0		0				
			2		2		2			
		4		4		4		4		
			2		2		2			
				0		0				
					2					

68. Путешественник встретился с четырьмя жителями острова рыцарей и лжецов. Он захотел узнать, кто из них рыцарь, а кто лжец, но те отвечали уклончиво.

Ах сказал: «Если Ох – рыцарь, то и Ух – рыцарь».

Ох сказал: «Если Ух – рыцарь, то Эх – лжец».

Ух сказал: «Если Эх – лжец, то и Ах – лжец».

Эх сказал: «Если Ах – лжец, то Ох – рыцарь».

Так кто из них рыцарь, а кто лжец, если рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут? (*А. Шаповалов*)

69. В однокруговом футбольном турнире участвовали 25 команд. За победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Команда, ставшая единоличным победителем, умудрилась проиграть k командам, занявшим последние места. Найдите наибольшее возможное значение k. (*Н. Наконечный*)

70. Вокруг поляны, в центре которой растёт баобаб, сидят 100 мудрецов. Им сообщили, что на них наденут колпаки с различными номерами от 1 до 100, и каждый будет видеть все колпаки, кроме своего собственного и колпака сидящего напротив мудреца. Затем по часовой стрелке, начиная с самого старшего, каждый должен будет назвать натуральное число от 1 до 100. Перед началом испытания мудрецы могут договориться, как им действовать. Какое наибольшее количество из них гарантированно смогут назвать номер на своём колпаке? (*А. Грибалко*)

71. Найдите наибольшее натуральное число, не кратное 10, которое при зачёркивании **а**) первой цифры; **б**) одной из цифр уменьшается на целое число процентов. (*А. Грибалко*)

72. В клетках таблицы 3×3 написаны натуральные числа. За один ход можно прибавить к трём числам в одной строке или в одном столбце одно и то же **а**) целое число; **б**) натуральное число. Докажите, что за несколько ходов можно добиться, чтобы не менее семи чисел стали точными квадратами. (*В. Карпов*)

73. На плоскости нарисовали пять равносторонних треугольников так, что ни у каких двух треугольников нет общей стороны. Все вершины этих треугольников отметили красным. Какое наименьшее количество красных точек могло получиться? (*Л. Шатунов*)

74. Точка M – середина стороны CD квадрата $ABCD$, а точка H – основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок AM. Докажите, что прямая DH делит угол AHB пополам. (*Д. Швецов*)

75. В треугольнике один из углов равен 60°.

а) Докажите, что расстояние от центра описанной окружности треугольника до биссектрисы этого угла вдвое меньше, чем разность сторон, которые его образуют.

б) Докажите, что расстояние от центра описанной окружности треугольника до ортоцентра равно разности сторон, которые образуют этот угол. (*А. Пешнин*)

76. Ломаная имеет восемь вершин, совпадающих с вершинами единичного куба. Может ли длина этой ломаной быть больше 12? Ломаная может быть замкнутой и иметь самопересечения. (*М. Евдокимов*)

Третий тур

77. Таблицу $n \times n$ требуется заполнить различными натуральными числами от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а все точные квадраты – в разных строках и в разных столбцах.

а) Докажите, что это невозможно при $n = 7$.

б) Можно ли сделать это при $n = 11$?

в) При каких n это можно сделать? (*А. Грибалко*)

78. Из 30 гирь массами 1 г, 2 г, …, 30 г выбрали десять с суммарной массой 155 г. Докажите, что оставшиеся гири можно разбить на две равные по массе и по количеству гирь группы.

79. Пятиклассники и шестиклассники решали на кружке задачу, при этом решить её смогли все шестиклассники и только пятая часть пятиклассников. После кружка выяснилось, что пятая часть школьников не решили задачу. Кого было больше и во сколько раз: пятиклассников или шестиклассников?

80. Равносторонний треугольник со стороной 10 разбит линиями, параллельными сторонам, на равносторонние треугольники со стороной 1. Фигуру, составленную из этих треугольников, назовём полоской, если она заключена между двумя соседними параллельными линиями. Исходный треугольник разрезали на 18 полосок. Докажите, что хотя бы одна из них состоит не менее чем из семи треугольников разбиения. (*А. Грибалко*)

81. Фёдор Конюхов летит к Северному полюсу на воздушном шаре, и его скорость всё время уменьшается.

а) Каждый час Фёдор смотрит на спидометр и отмечает: «Если бы я вылетел на час раньше и летел всё время с такой скоростью, как сейчас, то к этому моменту как раз долетел бы до полюса». Долетит ли он до полюса за 3 часа?

б) Та же задача, но Фёдор смотрит на спидометр каждую секунду.

в) В условиях пункта б) долетит ли Фёдор до полюса за 2 часа? (*Д. Мухин*)

82. **а**) К левому берегу реки подошли четыре гнома массами 1 кг, 2 кг, 3 кг, 4 кг. Как им переправиться на двухместной лодке за семь рейсов так, чтобы общие массы гномов в лодке на всех рейсах были равны 1 кг, 2 кг, …, 7 кг в некотором порядке? Все гномы должны оказаться на правом берегу только после последнего рейса.

б) Пять гномов массами 1 кг, 2 кг, 3 кг, 4 кг, 5 кг переправились с левого берега реки на правый с помощью двухместной лодки. Все вместе они оказались на правом берегу только после последнего рейса. Могло ли так случиться, что общие массы гномов в лодке на всех рейсах равны 1 кг, 2 кг, …, N кг в некотором порядке?

в) Та же задача для десяти гномов массами 1 кг, 2 кг, …, 10 кг. (*А. Шаповалов*)

83. Можно ли заполнить таблицу 3×3 различными ненулевыми цифрами так, чтобы каждое из шести трёхзначных чисел, которые получаются при чтении строк слева направо и столбцов сверху вниз, было простым?

84. На доске написано 11 равенств вида $* \times * = *$. Два игрока по очереди заменяют звёздочки натуральными числами. Первый стремится к тому, чтобы верных равенств оказалось как можно больше, а второй стремится этому помешать. Сколько верных равенств будет на доске в конце игры, если оба действуют наилучшим образом?

85. Лёвушка хотел построить две разные башни равной высоты из одинаковых коробков в форме параллелепипеда с целыми размерами (в сантиметрах). В башне все коробки Лёвушка располагает одинаково. Сначала он сложил первую башню из четырёх коробков, а вторую – из трёх, но первая оказалась ниже. Он добавил в неё коробок, и тогда она стала выше второй. Потом он опять сложил первую башню из четырёх коробков, расположив их иначе, а вторую – из двух, но первая была ниже, а когда он сверху поставил ещё один коробок, она стала выше. С третьего раза всё получилось: башни из двух и семи коробков оказались равной высоты. Найдите наименьший возможный объём коробка. (*А. Блинков*)

86. На окружности отмечено **а**) 1000 точек; **б**) чётное количество точек нескольких цветов, причём точек каждого цвета не больше половины от общего числа. Докажите, что точки можно разбить на разноцветные пары так, что если соединить хордами точки каждой пары, то эти хорды не будут пересекаться. (*А. Грибалко*)

87. Зритель даёт ассистенту фокусника пять карт из колоды, в которой 52 карты. Ассистент смотрит полученные карты, выкладывает их в ряд слева направо рубашкой вверх и затем в присутствии фокусника одну за другой открывает какие-то три выложенные карты. Могут ли фокусник с ассистентом договориться так, чтобы фокусник угадал каждую из двух оставшихся карт? (*М. Евдокимов*)

88. Восстановите треугольник по середине стороны и серединам высот, проведённых к двум другим сторонам. (*Г. Филипповский*)

89. Докажите, что число 3811…1 не может быть простым ни при каком количестве единиц.

90. Саша выписал величины всех углов четырёхугольника. Все они оказались целыми числами. Какое наибольшее количество различных цифр могло быть в их записи? (*А. Шаповалов*)

91. Центр правильного 55-угольника соединили отрезками со всеми его вершинами. Вместе со сторонами 55-угольника получилось 110 отрезков. Петя и Вася по очереди красят эти отрезки, по одному за ход, начинает Петя. Можно красить отрезок, только если он и выходящие из его концов отрезки не окрашены. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

92. На сторонах BC и CD единичного квадрата $ABCD$ на равном расстоянии от вершины C выбраны такие точки P и Q, что площадь треугольника APQ равна $\frac{1}{3}$. Найдите угол PAQ. (*А. Акопян*)

93. Для выступления на концерте в Солнечном городе Незнайка придумал фокус. Зрителям выдадут шесть карточек с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ассистенты Незнайки – Винтик, Шпунтик и Пончик – получат от зрителей по две карточки, каждый будет видеть только свои два числа. Сначала Винтик должен будет в присутствии Незнайки положить на стол одну из своих карточек числом вверх, потом то же самое должен будет сделать Шпунтик, а затем и Пончик. После этого Незнайка назовёт, какое число осталось у каждого. Сможет ли Незнайка гарантированно показать такой фокус? (*А. Грибалко*)

94. Треугольник с синими сторонами разрезали по медиане на два меньших треугольника и покрасили стороны разреза красным. Далее каждый раз выбирали из имеющихся треугольник наибольшей площади (любой, если таких несколько), разрезали его по медиане и красили стороны разреза красным. Такими операциями из исходного треугольника получили 1000 треугольников. Докажите, что можно выбрать не менее 100 из них и сложить треугольник с полностью красными сторонами. (*А. Шаповалов*)

95. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами A и B соответственно пересекаются в точках P и Q. Описанная окружность Ω треугольника APB повторно пересекает ω_1 в точке B_1, а ω_2 – в точке A_1. Точки A_2 и B_2 диаметрально противоположны точкам A и B относительно Ω. Прямая A_1A_2 пересекает ω_1 в точках K и L, а прямая B_1B_2 пересекает ω_2 в точках M и N. Докажите, что точки K, L, M, N лежат на одной окружности. (*Л. Шатунов*)

Финал

96. Равносторонний треугольник со стороной 7 разбит линиями, параллельными сторонам, на равносторонние треугольники со стороной 1. Саша провёл в некоторых треугольниках среднюю линию так, что никакие две из них не имеют общих концов. Какое наибольшее число средних линий мог провести Саша? (*А. Грибалко*)

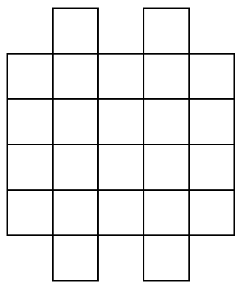
97. Четверым ребятам раздали семь карточек с различными натуральными числами от 1 до 7 так, чтобы никто не видел ни количества карточек, ни чисел на карточках у других (у каждого есть хотя бы одна карточка).

Аня сказала: «Я знаю, что среди остальных есть кто-то ровно с одной карточкой. А у меня сумма чисел на карточках меньше 7».

Боря сказал: «Я знаю, что среди остальных есть как человек с чётной суммой, так и человек с нечётной суммой».

Вова радостно воскликнул: «А я знаю, какие числа у Ани!»

Карточки с какими числами могут быть у Гены? (*Е. Новодворская*)



98. Можно ли разрезать фигуру, изображённую на рисунке, по линиям сетки на четыре равные части? (*Н. Чернятьев*)

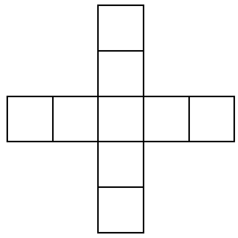
99. В однокруговом богатырском турнире участвовали среди прочих Илья, Добрыня и Алёша. Результаты всех поединков – победа или ничья – зафиксированы, но очки не подсчитаны. Царь, царица и царевна предлагают каждый свою систему подсчёта: сколько очков за победу, сколько за ничью, сколько за проигрыш. Они согласны только, что победа даёт больше ничьей, а проигрыш – меньше, но тройка этих чисел у каждого своя. Могли ли поединки закончиться так, что по системе царя больше всех очков наберёт Илья, по системе царицы – Добрыня, а по системе царевны – Алёша? (*А. Шаповалов*)

100. **а**) Дана бесконечная квадратная решётка. Можно ли раскрасить стороны клеток в два цвета так, чтобы каждые два узла решётки были соединены путями обоих цветов?

б) Дана бесконечная треугольная решётка. Можно ли раскрасить стороны треугольников в три цвета так, чтобы каждые два узла решётки были соединены путями всех трёх цветов? (*А. Грибалко*)

101. Существует ли палиндром, который делится на все натуральные числа **а**) от 1 до 9, кроме 5; **б**) от 1 до 13, кроме 5 и 10? (*М. Марков*)

102. **а**) В клетках фигуры, изображённой на рисунке, были расставлены различные натуральные числа от 2024 до 2032. Миша нашёл сумму чисел во всех пятиклеточных уголках этой фигуры. Затем Игорь расставил те же числа по-другому и тоже нашёл сумму во всех пятиклеточных уголках. Оказалось, что сумма Игоря отличается от Мишиной на 16. Какое число могло изначально стоять в центральной клетке?



б) В клетках фигуры, изображённой на рисунке, расставлены различные натуральные числа от 1 до 9. Миша нашёл сумму чисел во всех пятиклеточных уголках этой фигуры, а Игорь – во всех двухклеточных доминошках. Оказалось, что сумма Игоря отличается от Мишиной на 30. Какое число может стоять в центральной клетке? (*М. Марков*)

103. В клетках таблицы 3×3 написаны различные ненулевые цифры. Оказалось, что если сложить трёхзначные числа, образованные цифрами двух верхних строк, то получится число, образованное цифрами нижней строки. Может ли таблица сохранить это свойство при повороте на 90° по часовой стрелке? (*В. Клепцын*)

104. На шахматной доске стоят 52 коня. Обязательно ли найдётся конь, который бьёт не менее шести других? (*К. Кноп*)

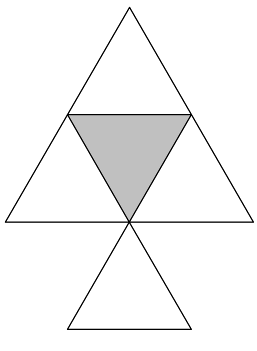
105. К левому берегу реки подошли N беглецов с номерами 1, 2, …, N. Есть лодка, в которой может плыть один беглец, если его номер – точный квадрат, или два беглеца с суммой номеров, равной точному квадрату.

а) Смогут ли они все переправиться на правый берег при $N = 14$?

б) Какое наибольшее число беглецов может оказаться на правом берегу при $N = 14$?

в) При каком наименьшем $N > 1$ все беглецы смогут переправиться на правый берег? (*А. Шаповалов*)

106. Разрежьте «ёлочку», составленную из четырёх равносторонних треугольников (см. рисунок), на три равные части. (*К. Кноп*)



107. Докажите, что найдётся n-значное натуральное число, составленное только из нечётных цифр и кратное 5^n, если **а**) $n = 2024$; **б**) n – произвольное натуральное число.

108. В доме живёт более 50 пенсионерок, каждая из них держит кошек и собак. По утрам некоторые пенсионерки выходят во двор и объединяются в группы так, чтобы в каждой группе у всех было либо поровну кошек, либо поровну собак, либо одинаковое общее количество питомцев. Может ли оказаться, что если на прогулку выйдут все пенсионерки, то они не смогут разбиться менее чем на десять групп, а если не выйдет хотя бы одна, причём любая, то смогут? (*А. Грибалко*)

109. По кругу написано шесть различных чисел. Ровно у одной пары соседей разность целая. Докажите, что эти шесть чисел можно написать по кругу так, чтобы все разности соседей были нецелыми. (*А. Шаповалов*)

110. Клетчатый прямоугольник 5×6 разбили по линиям сетки на пять фигур. Какой наибольший суммарный периметр может быть у этих фигур?

111. Перед забегом, в котором участвовали пять лошадей, каждый из 119 зрителей сделал прогноз, какая из них на каком месте завершит забег. У всех зрителей прогнозы были различные, но никто не дал полностью верный прогноз. За каждое верно угаданное место зритель получал 2 доллара, а за каждую лошадь, в позиции которой зритель ошибся на 1, он получал 1 доллар. Сколько было выплачено всем зрителям в сумме?

112. В четырёхугольнике $ABCD$ углы B и C равны 150° и 90° соответственно, $AB = 1$, $CD = 2$, $DA = 3$. Чему равен угол D? (*М. Евдокимов*)

113. Имеется девять палочек: три красных, три жёлтых, три зелёных. Известно, что можно сложить треугольник из любой тройки палочек трёх разных цветов.

а) Докажите, что можно сложить треугольник из трёх палочек одного цвета.

б) Сколько треугольников из палочек одного цвета можно гарантированно сложить? (*А. Шаповалов*)

114. К левому берегу реки подошли семь беглецов с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Есть лодка, в которой может плыть один беглец с простым номером или два беглеца с простой суммой номеров. За какое наименьшее количество рейсов все могут переправиться на правый берег? (*А. Шаповалов*)

115. На плоскости отмечено 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Катя и Оля по очереди проводят отрезки с концами в отмеченных точках, начинает Катя. При этом Катя проводит отрезки красного цвета, а Оля – оранжевого. Когда все возможные отрезки будут проведены, Катя подсчитает для каждой точки число выходящих из неё красных отрезков и найдёт сумму квадратов этих чисел, а Оля найдёт аналогичную величину для оранжевых отрезков. Выиграет та девочка, у которой результат будет больше, в случае равенства – ничья. Как закончится игра, если обе девочки действуют наилучшим образом? (*А. Грибалко*)

116. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D, а на отрезке BD – точка E. Оказалось, что $AB = AE$ и $CD = DE$. Докажите, что $AB + BC > AC + BE$.

117. На длинной бумажной ленте написаны без пробелов в порядке возрастания все натуральные числа от 9 до 90. Докажите, что ленту можно разрезать на две части так, чтобы число на каждой из них имело более 30 различных делителей. (*М. Евдокимов*)

118. Внутри равностороннего треугольника нарисован отрезок. Докажите, что наибольшая его проекция на стороны треугольника равна сумме проекций на две другие стороны. (*Д. Прокопенко*)

119. Докажите, что если числа a, b, $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ и $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}$ целые, то и $\frac{a^3+1}{b}+\frac{b^3+1}{a}$ целое.

120. На плоскости отмечено 50 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждые две точки соединили либо красным, либо синим отрезком. При этом образовались треугольники (с вершинами в отмеченных точках) четырёх типов: без красных сторон, а также с одной, двумя и тремя красными сторонами. Может ли треугольников всех четырёх типов быть поровну? (*А. Грибалко*)

121. Для всех натуральных n докажите неравенство $\frac{1!}{0!+1!}+\frac{1!+2!}{1!+2!}+\ldots+\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n-1)!+n!}<n$. (*В. Новиков*)

Источник: http://tursavin.ru