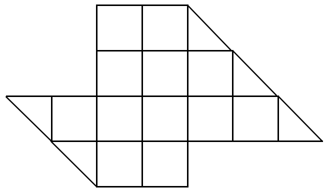
XXVIII турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2023 года

Личная олимпиада

1. Можно ли, используя только цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5 по одному разу, а также плюсы и минусы, составить выражение, значение которого равно 2023? (*М. Евдокимов*)

2. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на пять равных частей. (*И. Русских*)



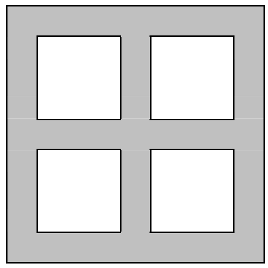
3. Трём мудрецам написали на лбу по цифре и сообщили, что цифры различны и одна из них равна сумме двух других. Все мудрецы, видя только цифры на лбах у двух других, одновременно сказали, что могут определить свою цифру. Какие цифры были у них на лбах? (*А. Блинков*)

4. **а**) Решите ребус ОЦЕНКА + ПРИМЕР = 1010101.

б) Имеет ли решение ребус ОЦЕНКА + ПРИМЕР = 1101011?

в) Имеет ли решение ребус ОЦЕНКА + ПРИМЕР = 456789? (*А. Грибалко*)

5. Можно ли клетчатый квадрат 9×9 разрезать по линиям сетки на восемь частей и сложить из них квадратную рамку толщиной в одну клетку с четырьмя одинаковыми квадратными дырками (см. рисунок)? (*А. Шаповалов*)



6. В однокруговом футбольном турнире за победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0.

а) Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире, если среди них есть две, которые одержали разное количество побед, но набрали поровну очков?

б) Назовём пару команд необычной, если они одержали разное количество побед, но набрали поровну очков, и кроме них столько очков не набрала никакая другая команда. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире, если по его итогам есть две необычные пары? (*А. Грибалко*)

7. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 записаны в строку в некотором порядке. Назовём пару чисел хорошей, если их разность является делителем суммы чисел, записанных между ними. Каково наибольшее возможное количество хороших пар? (*А. Грибалко*)

8. **а**) Поверхность куба $2 \times 2 \times 2$ разбита на единичные клетки и оклеена в один слой бумажными фигурками, каждая из которых покрывает три клетки. Клетки фигурок раскрашены в белый и чёрный цвета. Оказалось, что каждая грань куба целиком белая или чёрная, а если фигурки развернуть на плоскости, то не найдётся одинаковых по форме и окраске. Может ли белых и чёрных граней быть не поровну?

б) Поверхность куба $4 \times 4 \times 4$ разбита на единичные клетки и оклеена в один слой бумажными полосками ширины 1 и длины 4, 5 или 6. Клетки полосок раскрашены в белый и чёрный цвета. Оказалось, что каждая грань куба целиком белая или чёрная, при этом нет полосок, одинаковых по размерам и окраске. Может ли белых и чёрных граней быть не поровну? (*А. Шаповалов*)

9. Какое наибольшее число королей можно расставить **а**) на шахматной доске; **б**) на доске 11×11 так, чтобы каждый бил нечётное количество других королей? (*А. Шаповалов*)

10. На доске написано число $\frac{1}{2023}$. За одну операцию можно прибавить к числителю и знаменателю одно и то же натуральное число и сократить полученную дробь. Можно ли в результате нескольких таких операций получить число $\frac{1}{10}$? (*В. Новиков*)

11. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{Б \cdot У \cdot Б \cdot У \cdot Х - Б \cdot А \cdot Б \cdot А \cdot Х}{Б \cdot У \cdot Х - Б \cdot А \cdot Х}$. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, а разными – разные. (*Е. Бакаев*)

12. **а**) Точка M – середина стороны CD параллелограмма $ABCD$. Известно, что $AM = AB$. Докажите, что $AB < 2AD$.

б) Точка M – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Известно, что $AM = AB$. Сравните AB и сумму оснований трапеции. (*А. Блинков*)

13. В группе Лиги чемпионов четыре команды проводят турнир в два круга. В каждом из шести туров команды разбиваются на пары, и каждая пара играет один матч. За победу начисляется 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Какое наименьшее число очков может иметь команда после очередного тура, чтобы гарантировать себе выход из группы? Из группы выходят две команды, набравшие больше очков, чем две другие (в случае равенства очков ничего гарантировать нельзя). (*М. Евдокимов*)

14. Из красных и синих брусков $1 \times 1 \times 3$ сложили куб $3 \times 3 \times 3$. Может ли площадь красной части поверхности куба быть равна площади синей части? (*А. Грибалко*)

15. На столе в ряд лежат девять одинаковых на вид монет. Известно, что одна из них весит 9 г, одна – 11 г, а остальные – по 10 г. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, какая из монет – 9-граммовая или 11-граммовая – лежит левее? (*А. Грибалко*)

16. **а**) На доске написано 100 ненулевых чисел (не обязательно различных). Назовём число n прикольным, если сумма n наибольших чисел из написанных составляет $100 - n$ процентов от общей суммы чисел. Найдите наибольшее возможное количество прикольных чисел.

б) На доске написано 100 различных ненулевых чисел. Назовём число n прикольным, если сумма каких-то n чисел из написанных составляет $100 - n$ процентов от общей суммы чисел. Найдите наибольшее возможное количество прикольных чисел. (*В. Буфеев, О. Манжина*)

17. Верно ли, что любой прямоугольный треугольник можно с помощью циркуля и линейки разбить на два меньших, в которых найдётся по равной биссектрисе? (*А. Шаповалов*)

18. Поля и Витя по очереди ставят в круг 99 зрителей, среди которых 25 девочек и 74 мальчика, начинает Поля. За один ход можно поставить куда-нибудь одного зрителя (возможно, раздвинув остальных). Когда все зрители построены, Поля считает, у скольких человек в круге соседи разного пола, а Витя – у скольких одинакового. Выигрывает тот, чьё число окажется больше. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

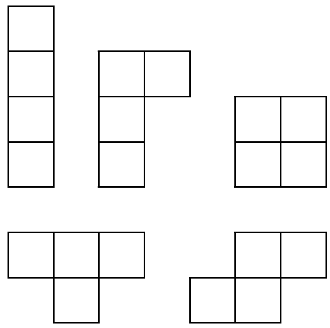
19. Саша и Ваня родились в XX веке. Сколько лет сейчас каждому, если Саша на 15 лет старше, а произведение цифр его возраста равно возрасту Вани? (*А. Блинков*)

20. Каждую цифру обозначили некоторой буквой. Оказалось, что ОЦЕНКА и ПРИМЕР делятся на 99. Может ли ЦЕНА делиться на 9? (*А. Грибалко*)

Командная олимпиада

21. Решите ребус У − Р = А : В = Н × Е = Н + И = Е.

22. На столе лежат пять четырёхклеточных фигурок (см. рисунок). Таня выбрала две из них, после чего Ваня выбрал две из трёх оставшихся. Каждый склеил из выбранных фигурок восьмиклеточную фигуру (фигурки они могли поворачивать и переворачивать). Могли ли у них получиться одинаковые фигуры? (*А. Грибалко*)



23. **а**) К обоим берегам реки подошло по пять человек, каждому нужно на другой берег. Известно, что у каждого есть ровно два друга на своём берегу. Кроме того, есть пара друзей на разных берегах. У одного берега есть двухместная лодка, плавать на которой можно только вдвоём (река бурная). Каждый согласен плавать только вместе с друзьями, но никакая пара друзей не согласна плыть вместе второй раз. Как им всем переправиться?

б) К обоим берегам реки подошло по нескольку человек, каждому нужно на другой берег. Известно, что у каждого есть ровно два друга, по одному на каждом из берегов. У одного берега есть двухместная лодка, плавать на которой можно только вдвоём (река бурная). Каждый согласен плавать только вместе с друзьями, но никакая пара друзей не согласна плыть вместе второй раз. Докажите, что все смогут переправиться.

в) К обоим берегам реки подошло по пять человек, каждому нужно на другой берег. Известно, что у каждого есть не менее двух друзей на своём берегу. Кроме того, есть пара друзей на разных берегах. У одного берега есть двухместная лодка, плавать на которой можно только вдвоём (река бурная). Каждый согласен плавать только вместе с друзьями, но никакая пара друзей не согласна плыть вместе второй раз. Обязательно ли они все смогут переправиться? (*А. Шаповалов*)

24. Встретились пять золотоискателей и, узнав, сколько золота у каждого, стали хвастаться.

а) «У меня ровно на 1 г меньше, чем у вас всех вместе», – сказал самый толстый. «У нас вместе ровно на 3 г меньше, чем у всех остальных», – сказали трое самых молодых. Найдите точное количество золота хотя бы у одного из золотоискателей.

б) «У меня ровно на 1 г меньше, чем у вас всех вместе», – сказал самый толстый. «У нас вместе ровно на 2 г меньше, чем у всех остальных», – сказали двое самых высоких. «У нас вместе ровно на 3 г меньше, чем у всех остальных», – сказали трое самых молодых. Сколько всего золота у пятерых золотоискателей, если у двоих самых высоких его поровну? (*А. Шаповалов*)

25. В ряд лежат 66 шариков. Среди любых шести идущих подряд есть шарики ровно пяти различных цветов. В какое наибольшее количество цветов могут быть окрашены шарики? (*В. Новиков*)

26. В детском саду 39 детей, среди которых есть и правши, и левши. Воспитательница должна рассадить их за круглым столом и поставить между каждыми двумя соседними местами блюдо с конфетами. После этого правши начнут перекладывать конфеты с левого от себя блюда на правое, а левши – с правого на левое (в случайном порядке). Как только ни один ребёнок не сможет переложить конфету, процесс закончится. Если у кого-то оба соседних блюда окажутся в этот момент пустыми, то он заплачет. Воспитательница подозревает, что как ни рассаживай детей и как ни раскладывай конфеты, рано или поздно кто-то заплачет. Права ли она? (*Т. Казицына*)

27. Маше на 12-летие испекли торт в форме квадрата 6×6, разбитый на единичные клетки и украшенный 12 вишенками (вишенки находятся внутри клеток, не более одной в каждой клетке).

а) Верно ли, что такой торт всегда можно разрезать по границам клеток на четыре части равной площади, в которых поровну вишенок? (*М. Евдокимов*)

б) Верно ли, что такой торт всегда можно разрезать по границам клеток на две равные части, в которых поровну вишенок?

28. В двух комнатах находилось по нескольку человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда врёт. Время от времени кто-нибудь из них переходил из одной комнаты в другую и, уже находясь в комнате, произносил: «Сейчас в этой комнате лжецов больше, чем рыцарей». Могло ли оказаться, что каждый человек совершил ровно один переход из комнаты в комнату? (*Н. Чернятьев*)

29. **а**) Существует ли такое натуральное число, что никакое число, полученное приписыванием к нему любой цифры в начале, в конце или между цифрами, не делится на 11?

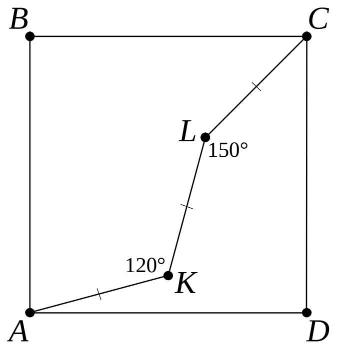
б) Существует ли такое натуральное число, в записи которого нет нулей, что оно само не делится на 11 и никакое число, полученное приписыванием к нему любой ненулевой цифры в начале, в конце или между цифрами, не делится на 11? (*О. Манжина*)

30. Компания из 22 человек участвовала в дворовом чемпионате по футболу. На каждый матч они выставляли команду из 11 человек. По завершении чемпионата оказалось, что каждые двое хотя бы раз были в одной команде. Какое наименьшее количество матчей могла сыграть эта компания? (*А. Грибалко*)

31. Петя посмотрел на механические часы и заметил, что минутная стрелка длиннее часовой, а образованный ими треугольник прямоугольный. Через час Петя снова посмотрел на часы и увидел, что треугольник, образованный этими же стрелками, хоть и другой, но снова прямоугольный. Докажите, что минутная стрелка вдвое длиннее часовой. (*Т. Казицына*)

32. Две перпендикулярные прямые пересекают оси координат в четырёх различных точках. Могут ли расстояния от этих точек до начала координат образовывать в некотором порядке арифметическую прогрессию? (*А. Пешнин*)

33. Внутри квадрата $ABCD$ отметили точки K и L так, что $AK = KL = LC$, $\angle AKL = 120°$ и $\angle KLC = 150°$ (см. рисунок). Докажите, что $AB = BK$. (*Е. Бакаев*)

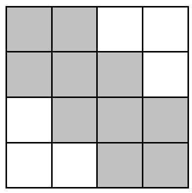


34. Петя и Вася играют, делая ходы по очереди, начинает Петя. За один ход можно поставить фишку в любую свободную вершину 99-угольника. Если в двух соседних с ней вершинах уже стоят фишки, игрок забирает их себе. Назовём такие фишки призовыми. Выигрывает тот, кто первым соберёт 100 призовых фишек. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Н. Чернятьев*)

35. Дан угол $\alpha < 180°$, две параллельные прямые l_1 и l_2 и лежащие между ними точки A и M, причём расстояния от точки M до прямых l_1 и l_2 равны. С помощью циркуля и линейки постройте точку B на l_1 и точку C на l_2 так, чтобы угол BAC был равен α и точка M была серединой отрезка BC. (*Е. Бакаев*)

36. Пусть $A_0A_1\ldots A_n$ – выпуклый $(n+1)$-угольник. В нём провели непересекающиеся диагонали, которые разбили его на $n-1$ треугольник. Всегда ли можно пронумеровать треугольники числами 1, 2, …, $n-1$ так, чтобы в k-м треугольнике была вершина A_k?

37. Десять одинаковых на вид гирек массами 21 г, 22 г, …, 30 г разложили в закрашенные клетки квадрата 4×4 (см. рисунок). Известно, что в каждой строке и в каждом столбце массы гирек идут в порядке возрастания (слева направо и сверху вниз). За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без дополнительных гирь можно определить массу каждой гирьки? (*К. Кноп*)



Первый тур

38. **а**) Каждая клетка бесконечной доски белая или чёрная. За один ход можно выбрать четырёхклеточную фигурку в виде буквы Т, в которой три клетки одного цвета и одна другого, и перекрасить эту клетку в противоположный цвет. Докажите, что за несколько ходов можно получить одноцветный квадрат 2×2.

б) Каждая клетка доски 10×10 белая или чёрная. За один ход можно выбрать четырёхклеточную фигурку в виде буквы Т, в которой три клетки одного цвета и одна другого, и перекрасить эту клетку в противоположный цвет. Докажите, что за несколько ходов можно сделать доску одноцветной. (*А. Шаповалов*)

39. **а**) В лесу 11 домов, некоторые из них соединены дорожками. В каждом доме живёт гном. Гномы считаются соседями, если их дома соединены дорожкой. Однажды гномы совершили обмены и переехали в другие дома так, что снова в каждом доме живёт гном. Могло ли оказаться, что теперь гномы являются соседями в том и только в том случае, если раньше они ими не были?

б) В лесу нечётное количество домов, некоторые из них соединены дорожками. В каждом доме живёт гном. Гномы считаются соседями, если их дома соединены дорожкой. Однажды гномы совершили обмены и переехали в другие дома. При этом оказалось, что снова в каждом доме живёт гном и теперь гномы являются соседями в том и только в том случае, если раньше они ими не были. Докажите, что ровно один гном не сменил место жительства. (*А. Грибалко*)

40. **а**) По кругу написали карандашом десять чисел. Затем между каждыми двумя соседними числами написали модуль их разности, а исходные числа стёрли. Оказалось, что теперь одно из чисел равно 100. Докажите, что какое-то другое число больше 11.

б) По кругу написано десять чисел. За одну операцию каждое число заменяется на модуль разности между этим числом и следующим за ним по часовой стрелке. Петя несколько раз выполнил эту операцию, и одно из чисел в круге стало равно 100. Докажите, что в этот момент какое-то другое число было больше 11.

в) По кругу написано несколько чисел. За одну операцию каждое число заменяется на разность между этим числом и следующим за ним по часовой стрелке. Петя несколько раз выполнил эту операцию и получил исходный круг, причём не все числа в нём равны нулю. Какое наименьшее количество чисел может быть в круге? (*О. Манжина*)

41. Из салуна Матушки Мидоус в 12:00 выполз Братец Черепаха, в 12:52 вышел Братец Лис, а в 13:06 выбежал Братец Кролик. В 13:13 Братец Кролик догнал Братца Лиса, а в 13:21 – Братца Черепаху. Во сколько Братец Лис догнал Братца Черепаху?

42. На шахматной доске расставлено несколько коней, а на каждой свободной клетке написано, сколько коней бьют её. Оказалось, что среди написанных чисел есть все натуральные числа от 1 до 8. Какое наименьшее количество коней может быть на доске? (*А. Грибалко*)

43. Петя написал на доске кратное 9 число из нескольких единиц, двоек, троек, четвёрок и пятёрок (каждая из этих цифр присутствует). Когда Петя стёр все единицы и двойки, оказалось, что число из оставшихся цифр всё ещё делится на 9. Тогда он стёр все тройки и четвёрки, но и после этого число на доске делилось на 9. Какое наименьшее число мог написать Петя изначально? (*Т. Корчёмкина*)

44. Пять пар друзей, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда врёт, выстроились в ряд так, что никакая пара друзей не стоит рядом. Каждый из них произнёс одну из двух фраз: «Между мной и моим другом стоит хотя бы один рыцарь» или «Между мной и моим другом стоит хотя бы один лжец». Оказалось, что обе фразы произнесены по пять раз. Какое наибольшее количество лжецов может быть среди собравшихся? (*Н. Чернятьев*)

45. **а**) Рыцари и драконы выстроились в ряд так, что никакие два рыцаря и никакие два дракона не стоят рядом. Все драконы либо трёхглавые, либо девятиглавые. Рыцарей оказалось на 20 больше, чем трёхглавых драконов, и на 23 больше, чем девятиглавых. Сколько голов в этом ряду?

б) Германн написал в строчку в каком-то порядке цифры 3 и 7. Лиза поставила плюсы между всеми соседними цифрами. Плюсов оказалось на 20 больше, чем троек, и на 23 больше, чем семёрок. Найдите значение получившейся суммы. (*И. Раскина*)

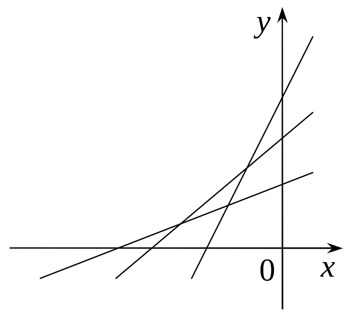
в) В строчку написано несколько единиц. Между каждой парой соседних единиц вписали знак «–», «+», «×» или «:». Оказалось, что единиц на 22 больше, чем знаков «–», на 21 больше, чем знаков «+», на 20 больше, чем знаков «×», и на 19 больше, чем знаков «:». Чему может быть равно значение получившегося выражения?

46. На доске написано число **а**) $\frac{1}{2521}$; **б**) $\frac{1}{2023}$. Какие числа, обратные цифрам, можно получить, если прибавить к числителю и знаменателю одно и то же натуральное число и сократить полученную дробь? (*А. Блинков*)

47. Дано натуральное число b. Найдите наименьшее натуральное число a, большее b и взаимно простое с ним, для которого $a^2 + a + b$ делится на b^2.

48. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны, а $\angle D = 120°$. Найдите все углы четырёхугольника, если $AB = 3CD = 3DA$.

49. Графики трёх линейных функций расположены, как показано на рисунке. Существуют ли такие числа a, b, c, что одна из функций задаётся формулой $y = a^2x + b$, вторая – $y = b^2x + c$, а третья – $y = c^2x + a$?



50. Точка M лежит внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC.

а) Докажите, что $AM < 2BM + CM$.

б) Для каких натуральных k всегда верно неравенство $AM < k \cdot BM + CM$?

51. Петя задумал ненулевые числа a, b, c и вычислил значения дробей $\frac{a-b}{a+b}$, $\frac{b-c}{b+c}$, $\frac{c-a}{c+a}$. Значения первых двух дробей Петя сообщил Васе. Всегда ли Вася может определить значение третьей дроби? (*А. Пешнин*)

52. Точка K – середина высоты остроугольного треугольника ABC, опущенной из вершины B. Оказалось, что отрезок AK вдвое меньше стороны BC. Докажите, что эти два отрезка образуют равные углы с AC. (*А. Пешнин*)

53. Точка M лежит внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, причём $AM = BM + CM$. Докажите, что $\angle ABC > 60°$. (*А. Пешнин*)

54. Найдите $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$, если $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{20}{23}$.

55. Из некоторой точки катет и гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника видны под углом 135°. Докажите, что эта точка лежит на медиане треугольника. (*М. Волчкевич*)

56. Решите в натуральных числах уравнение $4^x + 21^y = z^2$.

57. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны 90°. Точки A_1, B_1, C_1 – проекции вершин A, B, C соответственно на диагонали. Докажите, что середина диагонали AC является центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. (*Д. Швецов*)

58. На столе лежат $n \geq 4$ карточек, на которых написаны числа 1, 2, …, n. Два зрителя берут себе по одной карточке, после чего помощник фокусника берёт ещё одну карточку. Затем приходит фокусник, смотрит на оставшиеся карточки и называет, какие карточки взял каждый из зрителей. При каком наименьшем n фокусник и его помощник могут договориться действовать так, чтобы фокус всегда удавался?

Второй тур

59. **а**) По кругу лежат восемь одинаковых на вид монет, две из них фальшивые – они весят одинаково и легче настоящих. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, лежат фальшивые монеты рядом или нет?

б) Та же задача для 20 монет и трёх взвешиваний. (*А. Грибалко, К. Кноп, Н. Чернятьев*)

60. Есть 900 гирь массами 1 г, 2 г, …, 900 г. Можно ли их разложить на девять кучек одинаковой массы так, чтобы количества гирь во всех кучках были разными? (*А. Шаповалов*)

61. Иннокентий написал на доске четыре числа, использовав все десять цифр хотя бы по одному разу. Какова наименьшая возможная сумма этих чисел? (*А. Шаповалов*)

62. По круговому треку с постоянной скоростью ездит велосипедист Виталий, а его друзья Алексей и Борис стоят в двух точках трека и подбадривают его. В 12:00 Виталий заметил, что до Бориса ему нужно ехать втрое дольше, чем до Алексея, а в 12:05 было уже наоборот: до Алексея нужно было ехать втрое дольше, чем до Бориса.

а) От Алексея до Бориса Виталий едет 6 минут, а от Бориса до Алексея – дольше. Сколько минут Виталий тратит на один круг?

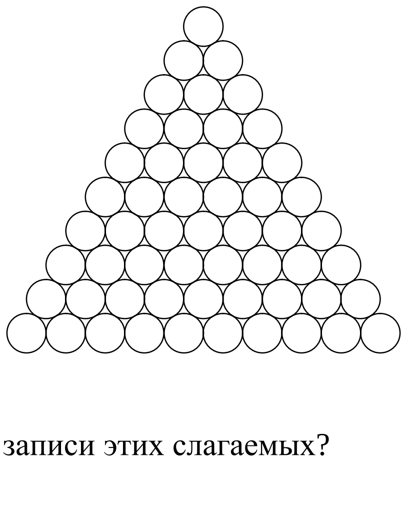
б) Один круг Виталий проезжает за 14 минут. Сколько минут Виталий едет от Алексея до Бориса, если от Бориса до Алексея он едет дольше? (*А. Тутубалина*)

63. Клетчатый квадрат $n \times n$ разрезали по границам клеток на полоски ширины 1 (не обязательно одинаковые). Верно ли, что из этих полосок можно сложить прямоугольник $(n-1) \times n$, если **а**) $n = 9$; **б**) $n = 100$? (*А. Шаповалов*)

64. На столе лежат 23 карточки с числами 1, 2, …, 23 и пустая коробка. Петя и Вася по очереди перекладывают по одной карточке в коробку, начинает Петя. Выигрывает тот, после чьего хода сумма в коробке впервые станет больше 200. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

65. **а**) По кругу выстроили 20 учеников и случайным образом раздали им номера от 1 до 20. На вопрос «Делится ли твой номер на номер соседа слева?» один ответил «Нет», остальные – «Да». Ровно половина ответов оказались ошибочными. Ошибся ли тот, кто ответил «Нет»?

б) По кругу выстроили 28 учеников и случайным образом раздали им номера от 1 до 28. Каждый ответил «Да» или «Нет» на вопрос «Делится ли твой номер на номер соседа слева?» Верных ответов оказалось больше, чем неверных. Какое наибольшее количество учеников могло ответить «Да»? (*А. Шаповалов*)



66. На столе выложили 55 монет в виде треугольника (см. рисунок), все орлом вверх. За один ход можно перевернуть три монеты, попарно касающиеся друг друга. Можно ли за несколько ходов добиться, чтобы все монеты лежали орлом вниз? (*А. Грибалко*)

67. **а**) Сумма трёх натуральных слагаемых равна 300. Какое наибольшее количество различных цифр может быть в записи этих слагаемых?

б) Саша выписал величины трёх углов треугольника. Все они оказались целыми числами. Какое наибольшее количество различных цифр могло быть в их записи?

(*А. Шаповалов*)

68. В однокруговом турнире по настольному теннису принимает участие несколько игроков одинакового рейтинга. После каждой партии рейтинг у победившего игрока всегда увеличивается на 1, а у проигравшего уменьшается на 1 лишь в случае, если его рейтинг до встречи был выше, чем у соперника (иначе остаётся прежним). Ничьих в теннисе не бывает.

а) Может ли после турнира оказаться, что игрок, у которого рейтинг больше всех остальных, одержал меньше побед, чем каждый из остальных игроков, если всего в турнире шесть участников?

б) При каком наименьшем числе участников после турнира может оказаться, что игрок, у которого рейтинг больше всех остальных, одержал меньше побед, чем каждый из остальных игроков? (*М. Евдокимов*)

69. Рассматриваются все такие числа x, для которых $x:\{x\}=2023$ и число $x-338\{x\}$ целое.

а) Сколько существует таких чисел x?

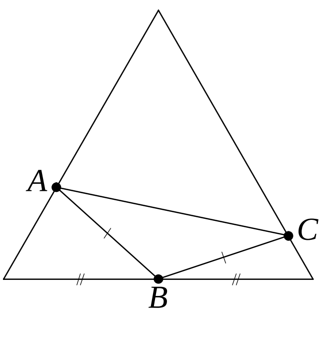
б) Найдите наибольшее такое число x. (*Д. Шноль*)

70. Царь пригласил несколько придворных мудрецов и огласил правила нового испытания. Каждому из них на лоб будет наклеена бумажка с целым числом, причём числа будут последовательными. Каждый мудрец будет видеть все числа, кроме своего. После этого они все должны будут произнести по одной фразе. Если мудрец не может точно определить своё число, он должен сказать об этом, а если может – должен назвать число. Однако порядок, в котором мудрецы будут говорить, заранее неизвестен ни им, ни царю – он будет определён жребием. Оказалось, что как бы ни выпал жребий, хотя бы один мудрец не сможет назвать своё число. При каком наибольшем количестве мудрецов такое возможно? (*А. Грибалко*)

71. Назовём сторону треугольника удачной, если, соединив отрезком некоторую её точку с противоположной вершиной, получим два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольников с наибольшим возможным количеством удачных сторон.

(*Б. Френкин*)

72. Вершины равнобедренного треугольника ABC с основанием AC лежат по одной на каждой стороне равностороннего треугольника. Оказалось, что точка B совпадает с серединой стороны равностороннего треугольника, а точки A и C удалены от этой стороны на разные расстояния (см. рисунок). Чему может быть равен угол A? (*М. Евдокимов*)



73. Основания AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ равны 7 и 4 соответственно. Биссектриса угла A проходит через середину высоты, опущенной из вершины C. Чему равна боковая сторона AB? (*А. Пешнин*)

74. Стороны правильного 12-угольника $A_1A_2\ldots A_{12}$ равны 1. Диагонали A_1A_8 и A_3A_{11} пересекаются в точке M. Найдите OM, где O – центр 12-угольника. (*М. Евдокимов*)

75. **а**) Натуральные числа a, b, c, не превосходящие 100, удовлетворяют равенству $a^4bc+b^4ca+c^4ab=(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3$. Сколько различных значений может принимать выражение abc? (*А. Пешнин*)

б) Та же задача, если a, b, c – различные натуральные числа, не превосходящие 50.

76. Вневписанная окружность с центром в точке I_a касается катета AB прямоугольного треугольника ABC в точке A_0. Вневписанная окружность с центром в точке I_c касается катета CB в точке C_0. Прямые I_aA_0 и I_cC_0 пересекают гипотенузу AC в точках A_1 и C_1, а друг друга – в точке P. Докажите, что середина AC лежит на вневписанной окружности треугольника A_1PC_1. (*Д. Швецов*)

77. Последовательность задана следующими условиями: a_1 – некоторое натуральное число, $a_{n+1} = a_n^3 + 2023n + 123$ при всех $n \geq 1$. Докажите, что в этой последовательности встретится не более одного точного квадрата.

78. Можно ли квадрат со стороной 1 разрезать на шесть выпуклых многоугольников, которыми удастся полностью покрыть некоторую окружность радиуса более 1? (*А. Грибалко*)

79. Игорь утверждает, что смог нарисовать трапецию, диагонали которой перпендикулярны и в которую можно вписать окружность. Могут ли его слова быть правдой? (*А. Пешнин*)

Третий тур

80. В бочке и кадке смешаны дёготь с мёдом. В бочке впятеро больше мёда, чем в кадке. А вот дёгтя в кадке всемеро больше, чем в бочке. Всего смеси больше в бочке. Чего больше: мёда в кадке или дёгтя в бочке?

81. В течение года ученики класса сходили **а**) на десять олимпиад; **б**) на N олимпиад. Каждые двое участвовали в разном количестве олимпиад, при этом каждый из них был на олимпиаде, на которой не был второй. Какое наибольшее число учеников может быть в этом классе? (*В. Буфеев, О. Манжина*)

82. **а**) За длинным прямоугольным столом в два ряда сидят 444 близоруких человека. Некоторые из них – рыцари, которые всегда говорят правду, остальные – лжецы, которые всегда врут. Каждый видит только того, кто сидит напротив, и по одному соседу справа и слева от себя (или только одного из них, если человек сидит с краю стола). Каждый из сидящих за столом сказал: «Я вижу ровно двух рыцарей». Могло ли рыцарей и лжецов быть поровну?

б) За столом в форме кольца сидят близорукие люди: N человек вдоль наружной стороны и N вдоль внутренней, напротив каждого сидящего снаружи сидит один внутри. Некоторые из них – рыцари, которые всегда говорят правду, остальные – лжецы, которые всегда врут. Каждый видит только того, кто сидит напротив, и по одному соседу справа и слева от себя. Каждый из сидящих за столом сказал: «Я вижу ровно двух рыцарей». Докажите, что если рыцарей больше, чем лжецов, то N делится на 4.

(*О. Манжина, Т. Корчёмкина*)

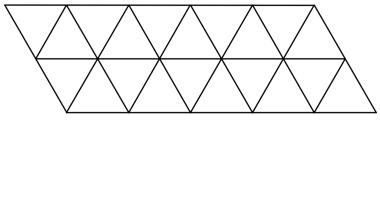
83. Какое наименьшее число коней можно расставить на шахматной доске так, чтобы на любую свободную клетку можно было переместить одного из них, сделав не более двух ходов? (*М. Евдокимов*)

84. Коля разложил по кругу 100 карточек с написанными на них натуральными числами (не обязательно различными). Саша выложил те же карточки по кругу в другом порядке.

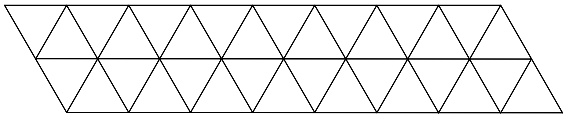
а) Могло ли оказаться, что у Коли каждые два соседних числа отличаются на 1, а у Саши все модули разностей соседних чисел различны?

б) Могло ли оказаться, что у Коли все модули разностей соседних чисел одинаковы, а у Саши все разности соседних чисел различны (Саша вычитает из числа следующее по часовой стрелке)? (*Н. Чернятьев*)

85. **а**) На каждой треугольной клетке доски, изображённой на рисунке, лежит по одному зерну. За один шаг можно переложить одно зерно в соседнюю клетку или переложить все зёрна из одной клетки в соседнюю пустую. Можно ли собрать все зёрна в одной клетке не более чем за 31 шаг?



б) В условиях пункта а) для доски, изображённой на рисунке, можно ли собрать все зёрна в одной клетке не более чем за 50 шагов? (*А. Шаповалов*)



86. Найдите наибольшее число, в котором все цифры различны и не равны 0, а каждая цифра, кроме последней, в целое число раз (возможно, в 1 раз) меньше суммы цифр справа от неё. (*А. Шаповалов*)

87. В некоторый момент во время однокругового турнира оказалось, что для любых двух команд, которые пока не сыграли друг с другом, найдутся ровно две команды, с которыми они обе успели сыграть. Ни одна команда, сыгравшая со «Спартаком», не играла ещё с «Динамо», а «Спартак» с «Динамо» уже сыграли. Докажите, что «Спартак» и «Динамо» к этому моменту сыграли с одинаковым числом команд.

88. **а**) Найдите какое-нибудь решение системы ребусов $\text{А}\cdot\frac{\text{Б}}{\text{В}}=\frac{\text{Г}}{\text{Д}}$, $\text{А}\cdot\frac{\text{Г}}{\text{Д}}=\frac{\text{Е}}{\text{Ж}}$, если известно, что дроби $\frac{\text{Б}}{\text{В}}$, $\frac{\text{Г}}{\text{Д}}$ и $\frac{\text{Е}}{\text{Ж}}$ несократимые и их знаменатели не равны 1.

б) Сколько решений имеет система ребусов из пункта а), если дроби $\frac{\text{Б}}{\text{В}}$, $\frac{\text{Г}}{\text{Д}}$ и $\frac{\text{Е}}{\text{Ж}}$ несократимые, но их знаменатели могут быть равны 1? (*А. Шаповалов*)

89. **а**) Есть 54 уголка, которые представляют собой два отрезка длины 1, соединённые в концах под прямым углом. Из них собрали каркас куба с ребром длины 3, каждая грань которого разбита на единичные квадраты. Докажите, что если каждый уголок находится целиком на одной из граней куба, то на каких-то двух гранях уголков поровну.

б) Докажите то же утверждение для 96 уголков и куба с ребром длины 4. (*А. Грибалко*)

90. В саду есть три прямолинейные дорожки. Садовник хочет посадить деревья так, чтобы для каждого дерева расстояния до всех дорожек были одинаковы. Какое наибольшее количество деревьев он сможет посадить? (*А. Блинков*)

91. Все натуральные числа от 1 до 2023 выписали подряд без пробелов. Между цифрами полученного числа поставили несколько знаков «+» и «–» так, что результат оказался равен 23. Могло ли количество знаков быть меньше 23? (*А. Шаповалов*)

92. Дан квадрат $ABCD$. На его сторонах AB и AD и диагонали BD построены равносторонние треугольники ABE, ADF и BDG. При этом точка E лежит вне квадрата, точка F – внутри квадрата, а точки G и A расположены в одной полуплоскости относительно BD. Докажите, что отрезки EF и GD равны и параллельны.

93. Докажите, что

$$\frac{2023}{2}-\frac{2022}{3}+\frac{2021}{4}-\ldots-\frac{2}{2023}+\frac{1}{2024}=\frac{1}{1013}+\frac{3}{1014}+\frac{5}{1015}+\ldots+\frac{2023}{2024}.$$

94. Найдите все натуральные n, для которых существует такая перестановка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$, что все числа $x_1+1, x_2+2, \ldots, x_n+n$ – степени двойки.

95. По кругу встали 600 жителей острова рыцарей и лжецов. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут. Путешественник спросил каждого из них: «Правда ли, что твои соседи – рыцарь и лжец?» По полученным ответам он смог определить, сколько в круге рыцарей. Так сколько же? (*А. Тутубалина*)

96. Две окружности разных радиусов пересекаются в точках C и D. Через точку C проведены прямые A_1A_2 и B_1B_2 (точки A_1 и B_1 лежат на первой окружности, A_2 и B_2 – на второй и не совпадают с C). Серединные перпендикуляры к отрезкам A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle CDO = 90°$.

97. Действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $n \geq 4$, таковы, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$ и $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq n^2$. Докажите, что наибольшее из этих чисел не меньше 2.

98. На клетчатом поле 111×111 находится невидимый корабль 11×11. Разрешается производить выстрел в любую клетку. Если выстрел попал в корабль, то он считается уничтоженным и игра заканчивается. Если же выстрел был неточен, то после него корабль смещается на одну клетку по горизонтали или по вертикали (в пределах доски). Можно ли за несколько выстрелов гарантированно уничтожить корабль? (*А. Грибалко*)

99. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H, A_0 – середина стороны BC. Прямые A_0B_1 и A_0C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно прямой BC, в точках P и Q. Точка M – середина отрезка PQ. Докажите, что прямая MH проходит через середину отрезка A_0A_1. (*Д. Прокопенко*)

Финал

100. **а**) В классе 36 человек. За учебный год каждый подрался не более чем с шестью одноклассниками. Докажите, что можно собрать команду для матбоя из шести человек, в которой никто ни с кем в течение года не дрался.

б) За учебный год каждый ученик класса подрался не более чем с шестью одноклассниками. При каком наименьшем количестве учеников в классе из них наверняка можно собрать команду для матбоя из шести человек, в которой никто ни с кем в течение года не дрался?

101. В стаде 60 коров, среди них есть тучные и тощие. Средняя масса тучных коров на 300 кг больше средней массы тощих коров и на 100 кг больше средней массы всех коров в стаде. Сколько в стаде тучных коров? (*И. Раскина*)

102. Имеется набор **а**) из семи; **б**) из восьми гирь различной целой массы. Назовём гирю хорошей, если все гири, кроме неё, можно разложить на две кучки равной массы. Какое наибольшее количество хороших гирь может быть в наборе? (*А. Шаповалов*)

103. **а**) Коробка для конфет – это прямоугольник 3×4 ячейки. В неё нужно положить n конфет (в каждую ячейку не более одной конфеты) так, чтобы для каждого натурального числа от 1 до $n - 1$ можно было отделить именно столько конфет либо горизонтальной, либо вертикальной прямой, проходящей по границам ячеек. При каком наибольшем n это возможно?

б) В шоколадке размером 4×5 долек есть n орешков (в каждой дольке может быть сколько угодно орешков). Известно, что для каждого натурального числа от 1 до $n - 1$ можно сделать прямой разлом между дольками так, чтобы в одном из полученных кусков было именно столько орешков. При каком наибольшем n это возможно?

в) Та же задача, что и пункт а), для коробки 4×5 ячеек. (*В. Клепцын*)

104. На трёх красных карточках написали одну цифру, а на трёх синих – другую. Затем взяли поровну красных и синих карточек и сложили из них простое число. Сколько карточек взяли? (*А. Блинков*)

105. Равносторонний треугольник со стороной 6 разбит линиями, параллельными сторонам, на равносторонние треугольные клетки со стороной 1. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход надо покрасить одну неокрашенную клетку в красный или синий цвет по своему усмотрению. Игра заканчивается, когда все клетки окрашены. Петя выигрывает, если найдётся треугольник со стороной 2, центральная клетка которого окрашена не так, как остальные, иначе выигрывает Вася. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

106. В вершинах пирамиды написали различные натуральные числа, а на каждой грани – произведение чисел в вершинах этой грани. Два числа на гранях оказались одинаковыми. Сколько вершин могла иметь пирамида? (*Т. Корчёмкина*)

107. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Однажды собралось 100 жителей острова, и их пронумеровали числами от 1 до 100. Всегда ли можно разбить их на пары так, чтобы они могли произнести следующие фразы (каждый по одной):

«Мой номер меньше номера моего напарника на 99»,
«Мой номер меньше номера моего напарника на 97»,
…,
«Мой номер меньше номера моего напарника на 1»,
«Мой номер больше номера моего напарника на 1»,
«Мой номер больше номера моего напарника на 3»,
…,
«Мой номер больше номера моего напарника на 99»? (*В. Новиков*)

108. **а**) Можно ли таблицу 4×4 заполнить целыми числами так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была положительной, а в каждом пятиклеточном кресте – отрицательной?

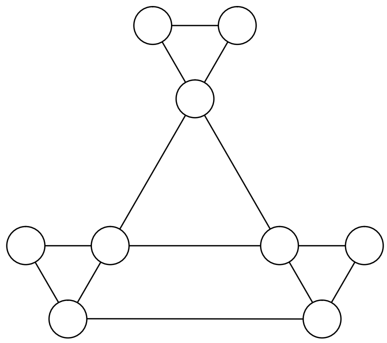
б) Из 64 белых и чёрных единичных кубиков сложили куб $4 \times 4 \times 4$. Назовём ежом фигуру, состоящую из семи кубиков, к одному из которых примыкают гранями шесть остальных. Оказалось, что в каждом еже белых кубиков больше, чем чёрных. Докажите, что и в каком-то кубе $2 \times 2 \times 2$ белых кубиков больше, чем чёрных. (*М. Евдокимов*)

109. Натуральные числа от 1 до n надо расставить по кругу так, чтобы каждое из них являлось делителем суммы двух своих соседей (расстановки, получающиеся друг из друга поворотами и отражениями, считаются одинаковыми).

а) Сколькими способами можно сделать это для $n = 50$?

б) Для какого n больше способов сделать это: для $n = 99$ или $n = 100$? (*А. Грибалко*)

110. Можно ли расставить в кружочках на рисунке числа 1, 2, …, 9 так, чтобы суммы чисел во всех пяти треугольниках были одинаковыми? (*О. Манжина, Т. Корчёмкина*)



111. **а**) В таблице 30×30 одна клетка окрашена в красный цвет, а все остальные – в зелёный. За один ход можно выбрать три клетки, образующие уголок, и перекрасить их следующим образом: красные клетки – в жёлтый, жёлтые – в зелёный, зелёные – в красный. Можно ли за несколько ходов сделать таблицу одноцветной?

б) Клетки таблицы $m \times n$ окрашены в три цвета: красный, жёлтый, зелёный. За один ход можно выбрать три клетки, образующие уголок, и перекрасить их следующим образом: красные клетки – в жёлтый, жёлтые – в зелёный, зелёные – в красный. При каких m и n можно сделать таблицу одноцветной, независимо от первоначальной раскраски? (*О. Манжина*)

112. Фермер Макар завёл поросят, козлят и телят. Масса Макара равна средней массе поросят, на 50 кг больше средней массы козлят и на 50 кг меньше средней массы телят. Средняя масса поросят и телят (вместе взятых) на 20 кг больше массы Макара, а средняя масса козлят и телят на 25 кг меньше массы Макара. Что и на сколько больше: масса Макара или средняя масса поросят и козлят? (*И. Раскина*)

113. В треугольнике ABC, углы A и B которого равны 120° и 40° соответственно, проведена биссектриса AD. На стороне AC отмечена точка E так, что $CE = BD$. Найдите угол EBC.

114. Натуральные числа x, y, z таковы, что $\dfrac{x}{x^2+z^2} = \dfrac{y}{y^2+z^2}$ и число $x^2 + y^2 + z^2$ простое. Докажите, что $x = y$.

115. У Малыша было 100 осей на подставке, на каждую из которых было надето по 20 колец. При этом на 50 осях были только белые кольца, а на остальных 50 – только чёрные. Пришёл Карлсон и всё перемешал в произвольном порядке. Докажите, что Малыш сможет восстановить порядок, используя дополнительно ещё одну ось, если перекладывать кольца можно только по одному между осями, а на каждую ось можно надеть максимум 20 колец. (*В. Новиков*)

116. В тридесятом царстве города соединены дорогами с односторонним движением. Докажите, что если между каждыми двумя городами есть путь хотя бы в одну сторону (возможно, проходящий через другие города), то можно добавить одну дорогу так, чтобы между каждыми двумя городами был проезд в обе стороны. (*А. Заславский*)

117. Окружность разбита 15 точками на равные дуги. Точки раскрашены в пять цветов так, что точки каждого цвета являются вершинами равнобедренного треугольника. Обязательно ли среди этих треугольников есть равные? (*А. Грибалко*)

118. Будем говорить, что число является n-суммой, если оно равно сумме n последовательных натуральных чисел. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $a = bc$, число d является a-суммой и не является b-суммой. Может ли число a быть c-суммой? (*Б. Френкин*)

119. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к числу на доске прибавляют $\frac{1}{m}$ или $\frac{1}{n}$ часть от его значения, где m и n – некоторые натуральные числа, записывают результат на доску, а старое число стирают. Обязательно ли на доске в какой-то момент появится ненатуральное число? (*А. Пешнин*)

120. Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность проходит через вершину C и касается гипотенузы AB в точке B. Докажите, что расстояние от точки A до этой окружности больше, чем расстояние от точки C до прямой AB. (*И. Кухарчук*, *А. Ершов*)

121. Правильный шестиугольник разрезан более чем на 100 равносторонних шестиугольников, каждый из которых окрашен в белый или чёрный цвет. Верно ли, что найдутся два шестиугольника, граничащих по отрезку и окрашенных в один цвет? (*М. Евдокимов*)

122. Цифры от 0 до 9 зашифрованы в каком-то порядке буквами от A до J. За один вопрос разрешается назвать несколько различных букв и узнать зашифрованную запись их суммы. Например, если $A = 5$, $B = 6$, $C = 1$, то можно, назвав A и B, узнать, что их сумма равна CC. Саша предполагает, что цифры зашифрованы по порядку, то есть $A = 0$, $B = 1$ и так далее. Может ли он, задав три вопроса, подтвердить или опровергнуть свою гипотезу? (*А. Заславский*, *А. Грибалко*)

123. В трапеции $ABCD$ расстояние от вершины A до прямой CD равно длине боковой стороны AB. Докажите, что расстояние от вершины D до прямой AB равно CD. (*А. Доледенок*)

124. Внутри равностороннего треугольника отметили 2022 точки и выписали все расстояния от этих точек до сторон треугольника. Могут ли выписанные числа образовывать в некотором порядке арифметическую прогрессию? (*А. Грибалко*)

Источник: http://tursavin.ru