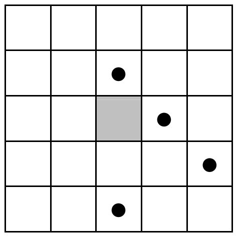
XXIV турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2018 года

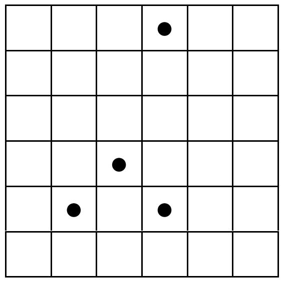
Личная олимпиада

1. В биологической лаборатории живут люди, мыши и змеи. Вместе у них 40 голов, 100 ног и 36 хвостов. Сколько в лаборатории змей? (*Д. Шноль*)



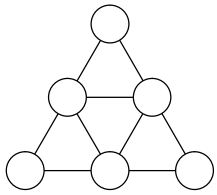
2. **а**) Разрежьте квадрат с вырезанной центральной клеткой, изображённый на рисунке, на четыре равные фигуры по линиям сетки так, чтобы в каждой фигуре было по одному кружочку.

б) Разрежьте квадрат, изображённый на рисунке, на четыре равные фигуры по линиям сетки так, чтобы в каждой фигуре было по одному кружочку. (*Я. Дрокин*)



3. **а**) Принцесса Турандот велела жениху назвать шесть различных натуральных чисел. После этого она расставит их в круги заранее заготовленной схемы (см. рисунок), как захочет. Если для каждых двух кругов, соединённых отрезком, одно из чисел в них будет делиться на другое, то принцесса выйдет за жениха замуж. Но если хотя бы в одном месте это правило нарушится, ему отрубят голову. Есть ли у жениха возможность выжить и жениться, независимо от каприза принцессы? (*А. Банникова*)

б) Можно ли расставить в кругах (см. рисунок) шесть различных натуральных чисел так, чтобы для каждых двух кругов, соединённых отрезком, одно из чисел в них делилось на другое, а для каждых двух кругов, не соединённых отрезком, стоящие в них числа друг на друга не делились?



в) Мальвина велела Буратино расставить в кругах (см. рисунок) шесть различных натуральных чисел. Если два круга соединены отрезком, то одно из чисел в них должно делиться на другое. После этого Буратино должен будет выучить столько стихотворений, чему равно наибольшее из поставленных чисел. Какое наименьшее количество стихотворений придётся выучить Буратино? (*А. Грибалко*)

4. В ряд лежат 30 кучек орехов. В каждых трёх кучках, лежащих подряд, в сумме девять орехов. Сколько всего орехов может быть в кучках с нечётным числом орехов? (*А. Шаповалов*)

5. На какое наименьшее количество частей можно разрезать проволочный каркас куба так, чтобы из этих частей можно было спаять каркасы двух кубов, если сгибать проволоку нельзя? (*С. Токарев*)

6. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда врут, и хитрецы, которые в разговоре с лжецом врут, а в остальных случаях говорят правду. Трое островитян – Эник, Беник и Вареник – сказали друг другу следующее.

Эник Бенику: «Ты хитрец».

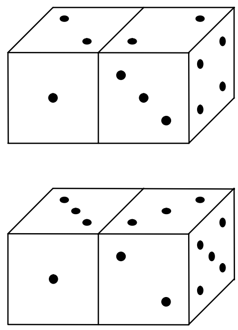
Беник Варенику: «Нет, я не хитрец».

Вареник Энику: «Да среди нас вообще нет хитрецов!»

Сколько лжецов участвовало в этом разговоре? (*И. Раскина*)

7. Семь друзей сидели в ряд на лавочке, и каждые двое сидящих рядом поссорились, объявив друг друга врагами. Все они пошли к реке, где есть двухместная лодка. Никто не хочет плыть вместе с врагом и быть на берегу, где врагов не меньше, чем друзей. Смогут ли они все перебраться на другой берег, если грести могут только те, кто сидел на лавочке первым, третьим и пятым слева? (*А. Шаповалов*)

8. Есть два одинаковых игральных кубика. У каждого на гранях отмечено по 1, 2, 3, 4, 5 и 6 точек (не обязательно одинаковым образом). Их два раза расположили по-разному и сфотографировали (см. рисунок). Известно, что суммарное количество точек на двух задних гранях оба раза было одним и тем же. Чему оно равно? (*А. Шаповалов*)



9. Двое играют на доске **а**) 8×8; **б**) 100×100. Они по очереди закрашивают по одной клетке. Выигрывает тот, после чьего хода образуется закрашенный квадрат 2×2. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

10. **а**) В однокруговом футбольном турнире за победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. По итогам турнира меньше всех очков набрала команда с положительной разностью забитых и пропущенных мячей. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в этом турнире?

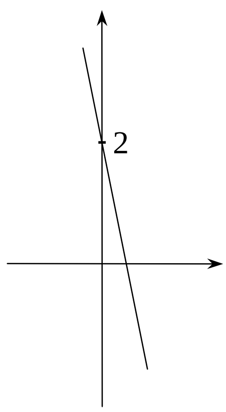
б) В однокруговом волейбольном турнире меньше всех очков набрала команда с положительной разностью выигранных и проигранных партий. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в этом турнире? В волейболе если матч заканчивается со счётом $3:0$ или $3:1$, то выигравшая команда получает 3 очка, а проигравшая – 0. Если же матч заканчивается со счётом $3:2$, то команды получают соответственно 2 и 1 очко. (*А. Заславский*)

11. Саша и Ваня родились 12 декабря, но Ваня моложе. В прошлом был момент, когда их возрасты (в годах) были квадратами натуральных чисел, а 12 декабря 2017 года их возрасты стали квадратами соседних натуральных чисел. Сколько лет им исполнилось в этот день, если оба родились в XX веке? (*А. Блинков*)

12. Точка M – середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На его катетах как на сторонах вне треугольника построены квадраты. Через их центры проведены вне треугольника прямые, параллельные катетам, которые пересеклись в точке N. Докажите, что прямая NM параллельна биссектрисе угла ACB. (*А. Блинков*)

13. Каждая грань куба $2 \times 2 \times 2$ разбита на единичные квадраты. Какое наибольшее число сторон этих квадратов можно покрасить так, чтобы покрашенные отрезки не соприкасались концами? (*А. Шаповалов*)

14. Вася исследовал уравнение с тремя переменными: $xy - xz - x + y + z = 0$. В начале исследования он, подставив вместо одной из переменных некоторое числовое значение, получил уравнение с двумя переменными и построил его график (см. рисунок). График какого уравнения он построил? (*Д. Шноль*)



15. Барон Мюнхгаузен утверждает, что перегнул некоторый бумажный треугольник по прямой, сделал ножницами прямой разрез, получил три части, согнутые разогнул – и все три оказались равными неравнобедренными треугольниками. Могут ли слова барона быть правдой? (*А. Шаповалов*)

16. В угловой клетке доски 100×100 стоит король. Петя и Вася по очереди делают им ходы так, чтобы расстояние от центра начальной клетки до центра той, в которой находится король, после каждого хода увеличивалось. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Грибалко*)

17. В правильном шестиугольнике *ABCDEF* на диагонали *AD* отмечена точка *P*, равноудалённая от вершины *F* и середины стороны *AB*. В каком отношении точка *P* делит диагональ *AD*? (*М. Волчкевич*)

18. На доске написаны три натуральных числа. За один шаг можно любое из них увеличить на наибольший общий делитель остальных двух чисел. Могут ли в какой-то момент на доске оказаться три числа, в 2 раза большие исходных? (*А. Грибалко*)

19. Барон Мюнхгаузен утверждает, что какие бы два натуральных числа, которые отличаются на 3, ему ни назвали, он сможет найти два других натуральных числа с такой же разностью квадратов. Не ошибается ли барон? (*А. Блинков*)

20. Назовём натуральное число суперпростым, если сумма его цифр – простое число. Назовём натуральное число суперпуперпростым, если сумма его цифр – суперпростое число. Каково наибольшее количество последовательных суперпуперпростых чисел? (*Д. Шноль*)

21. Пусть *D* – середина большей дуги *AC* описанной окружности остроугольного треугольника *ABC*. На сторону *AB* опущен перпендикуляр *DT*. Докажите, что прямая, проходящая через точку *T* перпендикулярно *BD*, делит сторону *AC* пополам. (*Л. Попов*)

Командная олимпиада и нулевой тур

22. **а**) В однокруговом турнире по волейболу участвовали пять команд. Если матч заканчивается со счётом 3 : 0 или 3 : 1, то выигравшая команда получает 3 очка, а проигравшая – 0. Если же матч заканчивается со счётом 3 : 2, то команды получают соответственно 2 и 1 очко. Оказалось, что все команды набрали разное число очков, а команда, занявшая пятое место, победила команду, занявшую первое, со счётом 3 : 1. У каких команд можно однозначно определить число очков?

б) В однокруговом турнире по футболу участвовали пять команд. За победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Оказалось, что все команды набрали разное число очков, а команда, занявшая пятое место, победила команду, занявшую первое. У каких команд можно однозначно определить число очков? (*А. Заславский*)

23. В семье трое детей, все они и родители родились в мае. В мае 2008 года родителям в сумме стало 100 лет. В мае 2018 года каждому ребёнку было больше 30 лет, а в сумме им стало 100 лет. В каком году всей семье в сумме стало 100 лет? (*А. Шаповалов*)

24. Решите систему ребусов RE + MI = FA, DO + SI = MI, LA + SI = SOL.

25. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда врут, и хитрецы, которые чередуют правдивые и лживые высказывания (начать могут с любого). За круглым столом сидели 12 островитян. Каждый произнёс три фразы: «Мой сосед слева – лжец. Следующий за ним – хитрец. Следующий за ним – рыцарь». Сколько хитрецов могло сидеть за столом? (*И. Николаева*, *А. Заславский*)

26. У шаха есть N камней массами 1, 2, …, N карат. Он хочет сделать из некоторых из них ожерелье так, чтобы массы каждых двух соседних камней в ожерелье отличались хотя бы вдвое. Какое наибольшее количество камней может быть в его ожерелье при **а**) $N = 25$; **б**) $N = 100$; **в**) произвольном $N > 2$? (*Е. Горская*)

27. На столе лежат две кучки по n спичек в каждой. Петя и Вася играют в такую игру. Первым ходом Петя перекладывает одну спичку из какой-нибудь кучки в другую, затем Вася тоже перекладывает одну спичку из какой-нибудь кучки в другую. Вторым ходом каждый перекладывает по две спички, третьим – по три и так далее. Выигрывает тот, после чьего хода все $2n$ спичек впервые окажутся в одной кучке. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник, если **а**) $n = 20$; **б**) n – произвольное натуральное число? (*И. Рубанов*)

28. Саша склеил из одинаковых кубиков параллелепипед и окрасил его снаружи. Оказалось, что ровно половина всех граней кубиков окрашена. Сколько кубиков мог использовать Саша?

29. **а**) Шахматную доску разбили на четыре квадрата 4×4. Ладья обошла все клетки доски, побывав на каждой по одному разу. При этом из левого нижнего квадрата она всегда делала ход в правый нижний, из правого нижнего – в правый верхний, из правого верхнего – в левый верхний, а из левого верхнего – в левый нижний. Какой суммарный путь могла пройти ладья?

б) Ладья обошла все клетки шахматной доски, чередуя горизонтальные и вертикальные ходы, и вернулась на исходную клетку. Какой наибольший путь она могла при этом пройти?

в) Клетки шахматной доски пронумеровали произвольным образом числами от 1 до 64. Ладья, начав с первой клетки, обошла по порядку все клетки (от каждой клетки к следующей она шла по кратчайшему пути) и вернулась на исходную клетку. Какой наибольший путь она могла при этом пройти? (*А. Грибалко*)

30. **а**) Двузначное число $\overline{ab}$ больше двузначного числа $\overline{ba}$ на натуральное число процентов. Обязательно ли $\overline{ab}$ делится на 3?

б) Найдите цифры a, b, c, если a на $\overline{ab}$% меньше числа $\overline{bc}$. (*А. Шаповалов*)

31. Разрежьте прямоугольник 20×18 и квадрат 1×1 на две равные части каждый так, чтобы из полученных четырёх частей можно было сложить квадрат.

32. На день рождения бабушки к ней приехали все её внуки со своими мамами и папами. Известно, что у бабушки больше одного ребёнка, а у всех них одинаковое количество детей. Бабушка испекла пирожки, но оказалось, что если внукам раздать по три пирожка, то двоим вообще не достанется. Зато если раздать им по два пирожка, то ещё и всем взрослым, включая бабушку, как раз хватит по пирожку. Сколько у бабушки детей и сколько внуков? (*М. Козлов*)

33. К реке подошли пять бродяг и пять портных. Всем нужно на противоположный берег. У левого берега есть двухместная лодка. Четверо портных трусливые: они не согласны оказаться на одном берегу с бродягами, если там портных меньше, чем бродяг, а вот храброму пятому портняжке такое не страшно. Как им всем переправиться, если **а**) бродяги подошли к левому берегу, а портные – к правому; **б**) все подошли к левому берегу? (*А. Шаповалов*)

34. Можно ли правильную пятиконечную звезду разрезать на две части и сложить из них многоугольник, который имеет центр симметрии? Переворачивать части нельзя. (*А. Грибалко*)

35. Дан прямоугольник $ABCD$. На стороне BC отмечена точка K, а на стороне CD – точка L так, что $CK = DL$ и $\angle DAL = \angle LAK$.

а) Найдите угол KLA.

б) Докажите, что биссектрисы углов C и D прямоугольника пересекаются на прямой AL. (*Е. Бакаев*)

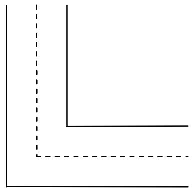
36. При каких целых n число $9^n - 25$ можно представить в виде произведения нескольких (более одного) последовательных целых чисел?

37. За квадратным фанерным листом 19×19 спрятана круглая мишень диаметра 7. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может гарантированно попасть в мишень, сделав не более пяти выстрелов. Не хвастает ли барон? (*А. Грибалко*)

38. Для всех натуральных n докажите неравенство $\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6n}$. (*М. Артемьев, И. Раскина*)

Первый тур

39. Из Санкт-Петербурга в Москву предложили построить новую дорогу. На ней будет встречаться 100500 поворотов на 90° (см. рисунок), зато других поворотов не будет. Сколько асфальта потребуется на эту дорогу, если длина разделяющей средней линии будет равна 700 км, ширина дороги – 6 м, а толщина асфальтового покрытия – 10 см? (*А. Вальтман*)



40. Есть 27 одинаковых кубиков. У каждого грани пронумерованы числами от 1 до 6, возможно, у разных кубиков по-разному. Из всех кубиков сложили куб с втрое большим ребром, при этом сумма чисел на каждой паре соприкасающихся граней оказалась одна и та же. Найдите сумму чисел на поверхности куба. (*А. Шаповалов*)

41. Какое наибольшее количество доминошек можно расположить на доске 100×100 так, чтобы каждая из них покрывала две соседние клетки и никакие две доминошки не имели общего отрезка стороны? (*Е. Бакаев*)

42. 13 мальчиков и 13 девочек стоят по убыванию роста в следующем порядке: мммддмммдддммдддддмммммдмдд. Какое наибольшее количество пар для танца они могут образовать так, чтобы в каждой паре мальчик был выше девочки? (*Е. Бакаев*)

43. На доске написано семь единиц. За один шаг можно выбрать любые два числа и заменить каждое из них на их сумму. Можно ли такими заменами получить на доске семь других равных чисел? (*С. Токарев*)

44. На каждой клетке шахматной доски стоит по гному – рыцарю, который всегда говорит правду, или лжецу, который всегда врёт. Соседями считаются гномы в клетках с общей стороной. Каждый гном сказал: «Среди моих соседей лжецов больше, чем рыцарей». Может ли рыцарей и лжецов быть не поровну? (*А. Шаповалов*)

45. На чемпионат мира по футболу приехали 1000 журналистов из 32 стран-участниц. Их расселили произвольным образом в двухместных номерах. Оказалось, что нельзя указать два номера, в которых жили бы представители ровно двух стран. Докажите, что из какой-то страны на чемпионат приехало не меньше 70 журналистов. (*А. Грибалко*)

46. Однажды Серёжа заметил, что родился не в пятницу и ни разу не встречал свой день рождения в пятницу. Какое наибольшее число полных лет ему могло быть в этот момент? Действие задачи происходит не обязательно в наше время, день рождения у Серёжи не 29 февраля. (*Е. Бакаев*)

47. Каждую цифру обозначили некоторой буквой. Оказалось, что число ДЮЖИНА делится на 12, а число ГРОСС делится на 144. Какую цифру обозначает буква С? (*С. Токарев*)

48. Перед Васей положили на два стола монеты на сумму 2018 рублей. Ему можно перевернуть все монеты на любом столе и взять с обоих столов все монеты, лежащие орлом вверх. Он перевернул монеты на левом столе, и ему досталось 500 рублей. А сколько денег досталось бы Васе, если бы он перевернул монеты на правом столе? (*А. Шаповалов*)

49. **а**) На доске были написаны числа 1, 2, …, 64. За одно действие с доски стирали три числа: какое-нибудь число X, одно из чисел, отличающихся от X на 1, и одно из чисел, отличающихся от X на 8. Через несколько действий на доске осталось одно число. Найдите все варианты, каким оно могло быть.

б) На доске написаны числа 1, 2, …, 1000. За одно действие можно стереть с доски четыре числа: какое-нибудь число X, одно из чисел, отличающихся от X на 1, одно из чисел, отличающихся от X на 10, и одно из чисел, отличающихся от X на 100. Можно ли за несколько действий стереть все числа? (*Е. Бакаев*)

50. **а**) Фигура полуферзь бьёт только в четырёх направлениях из восьми (эти четыре направления для каждой фигуры могут быть свои). Какое наибольшее количество не бьющих друг друга полуферзей можно расставить на шахматной доске?

б) Фигура четверть-ферзь бьёт только в двух направлениях из восьми (эти два направления для каждой фигуры могут быть свои). Какое наибольшее количество не бьющих друг друга четверть-ферзей можно расставить на шахматной доске? (*А. Пешнин*)

51. В треугольнике ABC проведён серединный перпендикуляр к стороне AB до пересечения с другой стороной в некоторой точке C_1. Аналогично построены точки A_1 и B_1. Чему могут быть равны углы треугольника ABC, если треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний? (*Б. Френкин*)

52. Дима разрезал треугольник на три треугольника, в каждом из которых есть угол α. Какие значения может принимать α? (*Д. Шноль*)

53. Известно, что $x^3 + 4x = 8$. Найдите $x^7 + 64x^2$.

54. В ряд записано десять различных натуральных чисел. Перед каждым из них (в том числе и перед первым) нужно поставить знак «+» или «–» и найти значение полученного выражения. Это делают всеми возможными способами. Среди полученных значений оказалось ровно N различных. Каким могло быть число N? (*Н. Наконечный*, *М. Артемьев*)

55. Точка M – середина стороны AC треугольника ABC. На стороне BC отмечена такая точка N, что $BN : NC = 2 : 1$. Оказалось, что угол BMN прямой. Докажите, что $AB = AM$. (*Е. Бакаев*)

56. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Прямая, симметричная прямой AC относительно прямой AB, пересекает прямую DB в точке B_1. Прямая, симметричная прямой DB относительно прямой DC, пересекает прямую AC в точке C_1. Докажите, что прямые B_1C_1 и BC параллельны. (*Д. Швецов*)

57. Известно, что $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{3a^2 + b^2 + 2ca} + \frac{b}{3b^2 + c^2 + 2ab} + \frac{c}{3c^2 + a^2 + 2bc} \le \frac{3}{2}.$$

Второй тур

58. Саша и Дима играют в морской бой на поле 8×8 по следующим правилам. Саша расставляет 16 одноклеточных кораблей так, чтобы они не соприкасались даже углами. Каждым ходом Дима называет одну из клеток поля, и если на этой клетке стоит корабль, то он считается уничтоженным. Докажите, что, независимо от расстановки кораблей, Дима за четыре хода может уничтожить хотя бы один корабль.

59. Из m монет две фальшивые, которые легче настоящих. Если на чашечные весы положить настоящую и фальшивую монету, они остаются в равновесии, но две настоящие монеты перевешивают две фальшивые. Можно ли найти обе фальшивые монеты за n взвешиваний, если **а**) $m = 8$, $n = 5$; **б**) $m = 16$, $n = 6$? (*А. Заславский*, *К. Кноп*)

60. На гранях кубика расставлены натуральные числа от 1 до 6 по одному разу. Для каждой вершины подсчитали сумму трёх чисел на гранях, которые в ней сходятся, и написали её на листке. Оказалось, что среди восьми чисел на листке нет двух, отличающихся на 1 или на 2. Какой набор чисел мог получиться на листке? (*Е. Бакаев*)

61. На карте страны, в которой шесть областей, первая область граничит ровно с одной другой областью, вторая – ровно с двумя, …, пятая – ровно с пятью. Со сколькими областями может граничить шестая область? (*О. Нечаева*)

62. Принцессы прибыли на приём в каретах по трое, в каждой карете цвета их платьев различны. Накрыты круглые столы разного размера, общее число мест равно числу принцесс. Докажите, что можно рассадить принцесс так, чтобы у каждой пары соседок платья были разного цвета. (*А. Шаповалов*)

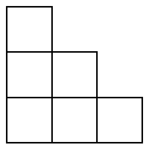
63. Лёша и Миша идут по лыжне с одинаковыми скоростями. Если Лёша остановится, то Миша догонит его через 1 минуту. Навстречу им едет трактор со скоростью в 2 раза большей, чем у лыжников. При приближении трактора лыжник останавливается и 10 секунд ждёт, пока трактор проезжает мимо него, а затем лыжник продолжает движение. После трактора, уничтожающего лыжню, лыжники идут в 2 раза медленнее, но Лёша прокладывает лыжню, на которую выйдет Миша. Через какое время Миша, после того как снова начнёт движение, догонит Лёшу? (*Д. Шноль*)

64. Утром пограничники обнаружили на перекопанной полосе 44 следа правых ног, 45 левых и шесть следов деревянного протеза, который, судя по отпечатку, принадлежит одноногому Джо. Сколько нарушителей ночью перебежало границу? Длина шага у всех одинаковая, ширина полосы постоянна, все нарушители пересекали её кратчайшим путём и не наступали на следы друг друга. (*М. Хачатурян*)

65. Таня, Настя, Илья и Ваня за два матбоя успели рассказать по три задачи. Все 12 докладов были оценены разным числом баллов, но в итоге все школьники заработали для команды одинаковое количество баллов. Таня получила за одну из задач 10 баллов, Настя – 2 балла, а Илья – 0. Сколько баллов получил за каждую из своих задач Ваня?

66. Каждый из 13 посетителей казино записал красными чернилами, сколько денег у него было до прихода в заведение, а чёрными – сколько стало после ухода из него. Как ни странно, наборы красных и чёрных чисел совпали. При этом у первого игрока денег стало больше на треть, у второго – на четверть, у третьего – на пятую часть, …, у двенадцатого – на $\frac{1}{14}$. И только у последнего денег стало меньше. Во сколько раз? (*О. Нечаева*)

67. Можно ли доску 66×66 разрезать на фигурки, изображённые на рисунке? (*А. Грибалко*)



68. На доске написано составное число. Вася увеличил его на наибольший простой делитель, а полученную сумму – на её наименьший простой делитель. Петя, напротив, увеличил его на наименьший простой делитель, а полученную сумму – на её наибольший простой делитель. Могли ли Васин и Петин итоговые результаты оказаться равными? (*С. Токарев*)

69. В кружок записались 15 мальчиков и 15 девочек. Оказалось, что каждый мальчик дружит хотя бы с тремя девочками. Докажите, что можно выбрать шестерых мальчиков и двух девочек так, что каждый из выбранных мальчиков дружит хотя бы с одной из выбранных девочек.

70. На клетчатой плоскости расположено n полосок, каждая из которых накрывает ровно n клеток. Полоски не накладываются друг на друга, и никакие две из них не лежат целиком в одной строке или в одном столбце. Верно ли, что на клетки, накрытые полосками, можно поставить n не бьющих друг друга ладей? (*Е. Бакаев*)

71. На стороне BC треугольника ABC отметили точку T, а на отрезке AT – такие точки P и Q, что $AP = PB$ и $AQ = QC$. Точка O – центр описанной окружности треугольника ABC.

а) Докажите, что углы OBP и OCQ равны.

б) Докажите, что одна из общих точек описанных окружностей треугольников OBP и OCQ лежит на прямой AT. (*Е. Бакаев*)

72. На отрезке AD отмечена точка O. Равносторонние треугольники ABO и OCD лежат в одной полуплоскости относительно прямой AD. Точки K, L, M, N – середины отрезков AB, BO, OC, CD соответственно. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам KN, LM и AD пересекаются в одной точке либо совпадают. (*Е. Бакаев*)

73. Назовём пару натуральных чисел (a, b) хорошей, если существует натуральное число c, для которого числа $a + b + c$ и abc являются точными квадратами. Докажите, что существует бесконечно много хороших пар вида $(2, n)$.

74. Известно, что $x_1^{100}+x_2^{100}+\ldots+x_n^{100}=1$ и $x_1^{101}+x_2^{101}+\ldots+x_n^{101}=-1$. Какие значения может принимать сумма $x_1^1+x_2^2+\ldots+x_n^n$?

Третий тур

75. В кружке по логике занимаются четыре школьника: Аня, Боря, Вася и Галя. Каждый из них – либо рыцарь, либо лжец, либо хитрец, причём есть хотя бы по одному рыцарю, лжецу и хитрецу. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда врут, хитрецы в разговоре с лжецами врут, а в остальных случаях говорят правду. После кружка ребята сказали следующее.

Аня Боре: «Больше всего задач сегодня решил Вася».

Боря Васе: «Больше всего задач сегодня решила Галя».

Вася Гале: «Больше всего задач сегодня решила Аня».

Галя Ане: «Больше всего задач сегодня решил Боря».

Кого в кружке больше: рыцарей, лжецов или хитрецов? (*М. Евдокимов*)

76. Есть сарделька и сосиска. Их можно прикладывать друг к другу и делать отметки на них, но нельзя использовать посторонние предметы, в частности, запрещается использовать линейку с делениями и делать отметки на любых других предметах. Как узнать, что длиннее: **а**) треть сардельки или пятая часть сосиски; **б**) седьмая часть сардельки или пятнадцатая часть сосиски?

77. Каждую ночь Марина полностью заряжает телефон. Если бы она только разговаривала по телефону, то батарея продержалась бы на 40% дольше, чем если бы она всё время играла на нём, и на 80% дольше, чем если бы сидела в интернете. Сегодня она говорила по телефону 20 минут, играла 50 минут и 80 минут была в интернете, после чего телефон полностью разрядился. Как долго Марина могла бы сидеть в интернете, если бы не делала ничего больше?

78. **а**) Олег и Миша играют с 16 одинаковыми белыми кубиками. Олег своим ходом склеивает между собой любые два из имеющихся многогранников (при этом кубики можно склеивать только целыми гранями), а Миша красит поверхность любого ещё не полностью окрашенного многогранника, если такой есть, красным фломастером. Начинает Олег. Игра продолжается, пока все кубики не будут склеены в один многогранник (после этого Миша его красит). Если при этом более чем у половины кубиков количество красных граней, с учётом спрятанных внутри многогранника, окажется чётным, то побеждает Олег, иначе – Миша. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

б) В аналогичной игре с 27 кубиками Олег хочет, чтобы по крайней мере у 20 кубиков количество красных граней оказалось чётным. Сможет ли Миша ему помешать?

(*Н. Наконечный*)

79. На каждой клетке доски 6×6 стоит фишка. Фишки белые с одной стороны и чёрные с другой. За один ход разрешается выбрать любой квадрат 2×2 и перевернуть в нём все фишки. Можно ли за несколько ходов добиться шахматной расстановки фишек, если сначала все они стоят белой стороной вверх?

80. На конференции каждый участник получает карточку **а**) с трёхзначным номером; **б**) с четырёхзначным номером. Цифры на карточках нарисованы, как на электронных часах (см. рисунок). Наученные горьким опытом, организаторы исключили по одному номеру из тех пар, которые получаются друг из друга переворачиванием карточки (перевёрнутая единица выглядит как единица). Какое наибольшее число участников может принять конференция? (*М. Хачатурян*)

81. На окружной олимпиаде работы проверяют сначала в «плюсах-минусах», а потом переводят отметки в баллы по таким правилам: «+» – 4 балла, «$\pm$» – 3 балла, «$\mp$» – 1 балл, «−» – 0 баллов. Класс из 25 человек сходил на олимпиаду, и никто не ушёл обиженным: каждый получил плюсов не меньше, чем минусов. При этом все получили разное число баллов. Какое наименьшее количество задач могло быть на олимпиаде? (*М. Хачатурян*)

82. В классе учатся 25 человек. Все они получили на олимпиаде разное число баллов. Каждый сложил количество мальчиков, выступивших лучше него, и количество девочек, выступивших хуже него. Все 25 сумм оказались чётными. Сколько девочек в классе?

83. В ребусе ONE + DEUX = DREI найдите наибольшее возможное значение DREI.

84. **а**) В клетках таблицы 10×10 расставлены все натуральные числа от 1 до 100. Докажите, что найдётся трёхклеточный уголок, сумма чисел в котором делится на 3.

б) Докажите то же утверждение для таблицы 11×11 и чисел от 1 до 121.

в) Все натуральные числа от 1 до n^2, где $n > 1$, требуется расставить в клетках таблицы $n \times n$ так, чтобы в каждом трёхклеточном уголке сумма чисел не делилась на 3. При каких n это возможно? (*А. Грибалко*)

85. На огороде Бабы Яги есть делянки с волшебными травами. Для приворотного зелья нужно иметь смесь ночной фиалки и болиголова в отношении $1 : 4$. На первой делянке Баба Яга успевает за ночь собрать 6 кг ночной фиалки, а на второй – 12 кг болиголова. На третьей делянке обе травы растут вперемешку, на ней Баба Яга успевает за ночь собрать 8 кг смеси в отношении $1 : 1$. Какое наибольшее количество смеси, необходимой для приворотного зелья, может собрать Баба Яга за ночь? (*Д. Шноль*)

86. Назовём рассыпчатостью натурального числа количество его натуральных делителей, не превосходящих 10. Каково наибольшее возможное количество последовательных натуральных чисел с одинаковой рассыпчатостью? (*С. Токарев*)

87. В однокруговом турнире по волейболу участвовали 20 команд. Если матч заканчивается со счётом $3 : 0$ или $3 : 1$, то выигравшая команда получает 3 очка, а проигравшая – 0. Если же матч заканчивается со счётом $3 : 2$, то команды получают соответственно 2 и 1 очко. Известно, что в матче между командами «Волки» и «Овцы» было сыграно пять партий и что вторая команда отстала от первой на столько же очков, на сколько третья отстала от второй, четвёртая от третьей, …, последняя от предпоследней. Сколько очков набрала команда, занявшая первое место? (*А. Заславский*)

88. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вовне построены равносторонние треугольники ACP и BCQ. Во сколько раз длина отрезка AQ больше длины отрезка, соединяющего середины AB и PQ? (*А. Пешнин*)

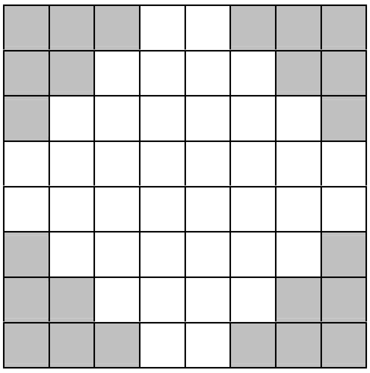
89. Для положительных чисел a, b, c известно, что $a^2b^2 + 1 = a^2 + ab$, $b^2c^2 + 1 = b^2 + bc$, $c^2a^2 + 1 = c^2 + ca$. Докажите, что $a = b = c$.

90. Прямоугольник разрезали на треугольники. Оказалось, что все треугольники, кроме одного, прямоугольные с углом 30°. Докажите, что оставшийся треугольник равнобедренный. (*Е. Бакаев*)

91. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Перпендикуляр, опущенный из вершины C на прямую AA_1, пересекает прямую BB_1 в точке B_0. Перпендикуляр, опущенный из вершины C на прямую BB_1, пересекает прямую AA_1 в точке A_0. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_0B_0C лежит на прямой A_1B_1. (*Д. Швецов*)

92. В стране 20 городов, некоторые из которых напрямую связаны двусторонними авиалиниями. Оказалось, что если в любых девяти городах закрыть аэропорты, то от каждого из оставшихся 11 городов можно будет долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Какое наименьшее число авиалиний может быть в этой стране?

Финал



93. На шахматной доске закрашено несколько клеток, как показано на рисунке. Сколькими способами можно поставить восемь не бьющих друг друга ладей на незакрашенные клетки? (*Е. Бакаев*)

94. **а**) Докажите, что из натуральных чисел от 1 до 1000 можно выбрать 501 число таким образом, чтобы для каждых двух выбранных чисел их произведение не делилось на их сумму.

б) Докажите, что из натуральных чисел от 1 до 1024 можно выбрать 522 числа с тем же условием.

95. В турнире матбоёв участвовали команды 5 и 6 классов. Пятиклассники выиграли на семь боёв больше и проиграли на 13 боёв больше, чем шестиклассники. Кто и на сколько выиграл больше боёв между командами 5 и 6 классов? (*С. Токарев*)

96. Разрежьте какой-нибудь клетчатый квадрат по линиям сетки не менее чем на пять равных частей так, чтобы сумма периметров частей была в 5 раз больше периметра исходного квадрата. (*А. Шаповалов*)

97. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Встретились три островитянки: Тома, Женя и Оля. Тома сказала: «Мы все лжецы». Женя на это ей ответила: «Нет, только ты». Кто Оля: рыцарь или лжец?

98. 100 спортсменов заняли места с 1-го по 100-е. После того как некоторые из них были дисквалифицированы, все остальные передвинулись на разное число мест. Какое наименьшее количество спортсменов могло быть дисквалифицировано? (*С. Токарев*)

99. Рассмотрим наименьшее натуральное число с суммой цифр 2018. Какую сумму цифр имеет следующее за ним число?

100. **а**) Петя и Вася играют на полоске 1×100. Первым ходит Петя, ставя фишку на любую клетку. Далее, начиная с Васи, игроки по очереди двигают фишку в любую сторону либо на одну, либо на четыре клетки. Дважды ставить фишку на одну и ту же клетку нельзя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

б) Та же задача, но игроки двигают фишку либо на три, либо на четыре клетки.

в) Задача б) для полоски $1 \times N$. (*Е. Бакаев*)

101. В стране десять городов. Некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что есть два города, не соединённые дорогой, и ни для какой тройки городов количество дорог между ними не равно двум. Найдите наибольшее возможное число дорог.

102. Трус, Балбес и Бывалый раздобыли три бутыли самогона. Им известно, что в какой-то из бутылей его крепость равна 45%, в какой-то – 65%, а в какой-то – 70%. Они могут отмерять любое количество самогона. Выпив стакан, каждый самогонщик роняет его в том и только в том случае, если содержимое было крепче 60%. Как всем троим наполнить стаканы и, выпив одновременно, определить крепость самогона в каждой бутыли? (*С. Токарев*)

103. На какое наименьшее количество частей можно разрезать проволочный каркас куба так, чтобы из этих частей можно было спаять каркасы двух кубов, если можно сгибать проволоку? (*С. Токарев*)

104. Дано 20 таких целых чисел, что сумма чисел, обратных к их кубам, равна $\frac{1}{2}$.

Докажите, что среди этих чисел найдутся три одинаковых.

105. На биссектрисе CL треугольника ABC выбрана точка K так, что $AC + AK = BC$. Докажите, что $\angle CAK = 2\angle CBK$.

106. Назовём семиугольник прямоугольным, если у него есть четыре прямых угла. Докажите, что любой прямоугольный семиугольник можно разрезать на семь прямоугольных семиугольников. (*А. Пешнин*)

107. Начав с некоторой клетки, ладья обошла все клетки доски 20×18, побывав на каждой по одному разу (считается, что ладья не посещает те клетки, через которые проходит). Докажите, что можно указать такие четыре клетки A, B, C, D, центры которых являются вершинами прямоугольника, что ладья в процессе обхода сделала ходы с A на B и с C на D. (*А. Грибалко*)

108. Из единичных кубиков семи разных цветов сложили куб $100 \times 100 \times 100$. Назовём ежом фигуру, состоящую из семи кубиков, к одному из которых примыкают гранями шесть остальных. Могло ли оказаться, что в каждом еже есть кубики всех цветов? (*С. Токарев*)

109. Назовём натуральное число n практичным, если каждое натуральное число, меньшее n, можно представить как сумму различных натуральных делителей числа n. Докажите, что произведение практичных чисел также практично.

110. В треугольнике ABC угол A равен 60°, а высота и биссектриса, проведённые из вершины A, равны h и l соответственно. Найдите радиус вписанной окружности треугольника. (*М. Волчкевич*)

111. На доске 100×100 расставлено 100 не бьющих друг друга ладей. Для каждой из них подсчитали, какой наименьший суммарный путь должны пройти остальные ладьи, чтобы попасть на клетку, где находится данная ладья. Докажите, что если для каких-то двух ладей полученные величины равны, то центры клеток, на которых находятся эти ладьи, равноудалены от центра доски. (*А. Грибалко*)

112. Натуральные числа a, b, c таковы, что $\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} = \frac{2c}{b+c}$. Докажите, что bc – точный квадрат.

Источник: http://tursavin.ru