XXIII турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2017 года

Личная олимпиада

1. Среди чисел $a+b$, $a-b$, ab и $\frac{a}{b}$ два положительных и два отрицательных. Какой знак у числа b? (*Б. Френкин*)

2. Можно ли на доску 6×6 положить 16 доминошек так, чтобы каждая из них покрывала две соседние клетки и никакие две не образовывали ни квадрат 2×2, ни прямоугольник 1×4? (*М. Евдокимов*)

3. По кругу лежат четыре камня. Известно, что масса одного из них равна сумме масс двух его соседей. Можно ли найти этот камень за два взвешивания на чашечных весах без гирь? (*А. Шаповалов*)

4. Граждане выстроились в очередь в пункт приёма стеклотары. У стоящих перед Петром в совокупности 25 бутылок, а у стоящих за ним – 15. У стоящих перед Василием в совокупности 17 бутылок, а у стоящих за ним – 19. У Петра и Василия вместе 12 бутылок. Сколько бутылок у гражданина, стоящего перед Петром? Граждан без бутылок в очереди нет. (*И. Раскина*)

5. Каждая грань куба $2\times 2\times 2$ разбита на единичные квадраты. Какое наибольшее количество квадратов можно закрасить так, чтобы они не соприкасались даже углами? (*А. Шаповалов*)

6. В записи 1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 расставьте между некоторыми цифрами знаки арифметических действий так, чтобы значение полученного выражения стало равно 2017. (*А. Заславский*)

7. Трём математикам выдали по карточке, на каждой из которых записано число, и сообщили, что числа на карточках натуральные, различные и их сумма равна 28. Каждый математик знает своё число, но не знает остальные числа. После этого между ними произошёл следующий разговор.

Первый: «Я знаю, что у кого-то из вас простое число».

Второй: «А я знаю, какие числа у каждого из вас».

Третий: «Я тоже знаю ваши числа».

Определите, какие числа были написаны на карточках. (*А. Грибалко*)

8. У Пети и Васи есть клетчатый квадрат 2017×2017. Сначала Петя делит квадрат по линии сетки одним прямолинейным разрезом на две части, а Вася выбирает одну из них (другая выбрасывается) и режет её аналогичным образом на две части. Затем Петя выбирает одну из этих частей, разрезает её и так далее. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Я. Дрокин*)

9. В школе проходил однокруговой турнир по настольному теннису. Каждую встречу судил один из остальных участников, и все участники судили одинаковое количество встреч. Докажите, что судей можно было распределить так, чтобы каждый участник судил ровно одну встречу каждого другого. (*Б. Френкин*)

10. За контрольную можно получить одну из оценок: 2, 3, 4 или 5. Оценка за четверть равна среднему арифметическому **а**) восьми; **б**) девяти оценок за контрольные работы, округлённому до ближайшего целого числа (полуцелые числа округляются в большую сторону). По результатам четверти у Васи выходит оценка 3. Он утверждает, что сможет переписать три контрольные так, чтобы получить за четверть оценку 5. Может ли это быть правдой? (*М. Евдокимов*)

11. Прямая разбила треугольник на меньший треугольник, подобный исходному, и четырёхугольник, симметричный относительно своей диагонали. Докажите, что исходный треугольник прямоугольный. (*А. Шаповалов*)

12. **а**) 30 принцесс сидят по пятеро вокруг шести столов, и у каждой пары соседок платья разного цвета. Всегда ли их можно рассадить по трое вокруг десяти столов так, чтобы по-прежнему у каждой пары соседок были платья разного цвета?

б) 20 принцесс сидят по пятеро вокруг четырёх столов, и у каждой пары соседок платья разного цвета. Докажите, что их можно пересадить за пять круглых столов по четверо так, чтобы по-прежнему у каждой пары соседок были платья разного цвета. (*А. Шаповалов*)

13. Назовём число изысканным, если его можно представить в виде суммы двух чисел, каждое из которых получается из него перестановкой цифр. Является ли изысканным число **а**) 9876543; **б**) $2^{2017} + 1$? (*Я. Дрокин*)

14. Равносторонний треугольник разрезали на пять равнобедренных треугольников. Обязательно ли все углы получившихся треугольников измеряются целым числом градусов? (*А. Шаповалов*)

15. По кругу стоят 25 детей. Каждого из них спросили: «Сколько твоих соседей одного с тобой пола?» Известно, что все дали правдивые ответы, при этом восемь детей ответили «Два», восемь – «Один» и восемь – «Ни одного». Что ответил 25-й ребёнок? (*А. Шаповалов*)

16. Пункты А и Б расположены на берегу реки, причём А ниже по течению. Из А в Б отплыл катер, а через некоторое время из Б навстречу ему начала двигаться лодка. Они встретились, когда катер прошёл $\frac{4}{5}$ пути до Б. Доплыв до Б, катер развернулся и догнал лодку, затратив после выхода из Б на это $\frac{3}{5}$ времени, которое требуется ему на весь путь из Б в А. Через какое время после катера приплывёт в А лодка, если на весь путь катер затратил 10 часов? (*Я. Дрокин*)

17. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H, точка K – середина отрезка CH. Докажите, что угол AKB острый. (*А. Блинков, А. Заславский*)

18. В однокруговом футбольном турнире участвовали $n > 2$ команд. За победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Оказалось, что все команды, кроме команды «Козлы», набрали одинаковое число очков, причём «Козлы» не со всеми командами сыграли одинаково. Найдите наименьшее значение n, если известно, что «Козлы» заняли последнее место. (*А. Блинков*)

19. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. Точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно, E – середина MN, F – середина BE, G – середина AF, H – середина EG. Найдите расстояние от точки H до стороны AD. (*М. Волчкевич*)

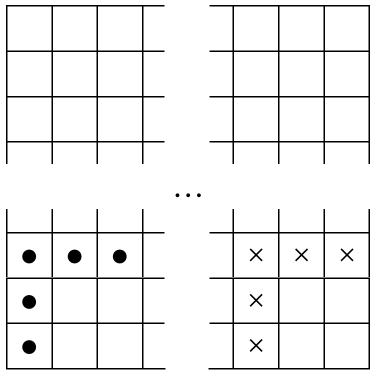
20. Можно ли равносторонний треугольник разрезать на пять равнобедренных треугольников, среди которых нет подобных? (*М. Панов*)

21. В треугольнике ABC на стороне AB и на продолжении стороны BC за точку C отмечены точки E и F соответственно так, что $AE = CF = AC$. Прямые EC и AF пересекаются в точке D, на прямую AC опущен перпендикуляр DH. Докажите, что длина отрезка AH равна полупериметру треугольника ABC. (*М. Волчкевич*)

Командная олимпиада

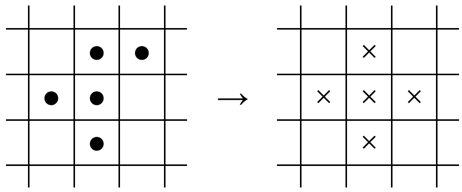
22. Есть пять яблок, каждое из которых весит 220 г. Их разрезали на куски и раздали 11 школьникам так, что каждый получил ровно по 100 г. Могли ли все куски весить не меньше 43 г и не больше 57 г? (*К. Кноп*)

23. Шахматная фигура кузнечик прыгает на любое расстояние по горизонтали, вертикали или диагонали, при этом она должна перепрыгнуть ровно одну занятую клетку и опуститься на следующую за ней свободную клетку.



а) В левом нижнем углу доски 17×17 находятся пять кузнечиков, как показано на рисунке. Переместите их в правый нижний угол доски в клетки, отмеченные крестиком на том же рисунке.

б) В левом нижнем углу шахматной доски на всех клетках квадрата 3×3, кроме центральной, находятся восемь кузнечиков. Могут ли они переместиться во все клетки, кроме центральной, такого же квадрата в правом верхнем углу доски?



в) На бесконечной клетчатой доске находятся пять кузнечиков, как показано на рисунке, остальные клетки свободны. Могут ли кузнечики через несколько прыжков образовать крест, изображённый на том же рисунке? (*А. Шаповалов*)

24. Ребята обсуждали, сколько лет их учительнице Елене Сергеевне. Вот что они сказали.

Антон: «Елене Сергеевне больше 38 лет».

Берта: «Елене Сергеевне меньше 35 лет».

Вика: «Ей меньше 40 лет».

Гоша: «Ей больше 40 лет».

Дина: «Берта и Вика правы».

Женя: «Вы все ошибаетесь».

Оказалось, что мальчики и девочки ошиблись одинаковое количество раз. Можно ли узнать, сколько лет Елене Сергеевне? (*Д. Шноль*)

25. В однокруговом волейбольном турнире участвовали десять команд. Если матч заканчивается со счётом $3:0$ или $3:1$, то выигравшая команда получает 3 очка, а проигравшая – 0. Если же матч заканчивается со счётом $3:2$, то команды получают соответственно 2 и 1 очко.

а) Известно, что в матче между командами «Козлы» и «Бараны» было сыграно пять партий, «Козлы» заняли последнее место, а остальные команды набрали поровну очков. Сколько очков набрали «Козлы»?

б) Известно, что в матче между командами «Волки» и «Овцы» было сыграно пять партий и что вторая команда отстала от первой на столько же очков, на сколько третья отстала от второй, четвёртая от третьей, …, последняя от предпоследней. Сколько очков набрала команда, занявшая первое место? (*А. Заславский*)

26. У всех зайцев поровну яблок, у всех белок поровну груш. Если один заяц раздаст всем белкам по яблоку, то у него ничего не останется. А если белка раздаст всем зайцам по две груши, то у неё тоже ничего не останется. Всего фруктов 99. А сколько зверей, если зайцы и белки по одному не встречаются? (*Д. Шноль*)

27. **а**) Стороны многоугольника идут по линиям клетчатой сетки, причём длина одной стороны равна 5, а другой – 6. Назовём вершину разносторонней, если в ней сходятся стороны разных длин. Какое наименьшее количество разносторонних вершин может быть в этом многоугольнике?

б) Та же задача, но длина одной стороны многоугольника равна 43, а другой – 57.

(*Е. Бакаев*)

28. Гномы и эльфы не любят друг друга, и если одни получают численное превосходство не менее 2 : 1, то обязательно нападают на других.

а) К левому берегу реки подошли девять гномов и девять эльфов. Как им всем переправиться на правый берег с помощью двухместной лодки, избежав нападений?

б) К левому берегу реки подошли N гномов и N эльфов. Всем им удалось переправиться на правый берег с помощью двухместной лодки, избежав нападений. При каких N такое возможно? (*А. Шаповалов*)

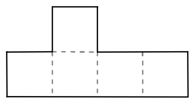
29. В полоске 1×100 отметили часть клеток. В каждую неотмеченную клетку записали модуль разности между количеством отмеченных клеток слева и справа от неё. Какое наименьшее количество клеток могло быть отмечено, если все записанные числа оказались положительными и различными? (*А. Шаповалов*)

30. От пластины A к пластине B с интервалами в 2 секунды вылетели четыре молекулы с одинаковыми постоянными скоростями. Расстояние от A до B молекула пролетает за 6 секунд. После столкновения с пластиной или с другой молекулой скорость молекулы по величине не меняется, а направление движения меняется на противоположное. Через сколько секунд после начала движения первой молекулы произойдёт тысячная по счёту встреча молекул? (*Я. Дрокин*)

31. На продолжении биссектрисы BL треугольника ABC отмечена точка K так, что $BK = AB$. Докажите, что если $BL = BC$, то $CK = AL$. (*А. Блинков*)

32. Найдите все такие натуральные m и n, что $5^m - 3^n = 16$.

33. Забор окружает участок, который можно разбить на пять квадратов со стороной 10 м (см. рисунок). Можно ли разбить его на две части равной площади дополнительным забором короче 14 м?



34. В треугольнике ABC угол B равен 60°, AA_1 и CC_1 – высоты, H – ортоцентр, M – середина малой дуги AC описанной окружности. Докажите, что прямые MH и A_1C_1 перпендикулярны. (*Д. Швецов*)

Первый тур

35. Один из трёх журналистов получил премию. Известно, что один из них всегда говорит правду, другой всегда врёт, а третий может говорить и правду, и ложь. Каждый из них на вопрос «Это вы получили премию?» ответил «Нет». Затем в том же порядке каждого из них спросили: «Верен ли ваш предыдущий ответ?», и все ответили «Да». Наконец, в том же порядке каждого спросили: «Верен ли ответ предыдущего человека?», и все ответили «Нет». Можно ли наверняка определить, кто получил премию?

(*В. Мазорчук*)

36. Великан сделал табуретку, у которой все четыре ножки получились разной длины. Он решил отпилить кусок от самой длинной ножки, чтобы подравнять её с самой короткой, но ошибся и отпилил на 50 см больше, чем надо. Пытаясь повторить эту операцию, он отпилил на 49 см больше, чем надо, затем на 48 см и так далее, пока наконец не отпилил столько, сколько хотел. Сколько после этого надо отпилить кусков и какой длины, чтобы все ножки стали одинаковыми? (*А. Заславский*)

37. На доске написаны числа 1, 2, …, n. За один шаг с доски стираются два произвольных числа, а вместо них записывается наименьший простой делитель их суммы. Эта операция проводится до тех пор, пока на доске не останется одно число.

а) Каким может быть это число при $n = 100$?

б) Найдите наименьшее возможное n, при котором оставшимся числом может быть 97.

38. **а**) Аня, Боря и Вася несколько раз бегали наперегонки. После каждого забега прибежавший первым получал 3 очка, вторым – 2 очка, а третьим – 1 очко. По итогам всех забегов ребята получили поровну очков. Известно, что Аня прибегала раньше Бори 17 раз, а раньше Васи – 12 раз. Сколько было забегов?

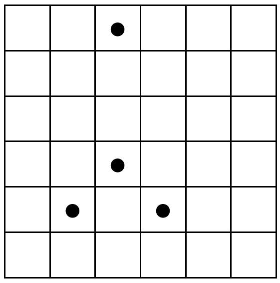
б) Аня, Боря, Вася и Гриша несколько раз бегали наперегонки. После каждого забега прибежавший первым получал 4 очка, вторым – 3 очка, третьим – 2 очка, а четвёртым – 1 очко. Известно, что Аня прибегала раньше Бори 20 раз, раньше Васи – один раз, а раньше Гриши – семь раз. Могли ли по итогам всех забегов ребята получить поровну очков?

39. 30 детей играли за круглым столом. Очередной игрок добавлял в кучу на середине стола десять орехов из мешка и кидал игральный кубик с натуральными числами от 2 до 7 на гранях. Если общее число орехов в куче делилось на выпавшее число, он съедал из кучи соответствующую часть орехов (например, треть, если выпала тройка), иначе не ел ничего. Известно, что последний в круге выбросил семёрку и съел семь орехов. Сколько всего орехов съели дети, если до первого хода в куче было 77 орехов? (*А. Шаповалов*)

40. **а**) На кружок ходят Петя и ещё девять ребят. Известно, что какие бы четверо из них ни пришли на занятие, их можно посадить за две парты так, чтобы за каждой партой сидели друзья. Докажите, что на этот кружок ходит не меньше семи Петиных друзей.

б) На кружок ходят десять ребят. Известно, что какие бы четверо из них ни пришли на занятие, их можно посадить за две парты так, чтобы за каждой партой сидели друзья. Докажите, что среди этих десяти ребят можно выбрать четвёрку, в которой каждый дружит с тремя остальными.

41. Можно ли разрезать квадрат, изображённый на рисунке, на четыре равные фигуры по линиям сетки так, чтобы в каждой фигуре было по одному кружочку? (*Я. Дрокин*)



42. **а**) Существует ли шестиугольник, все стороны которого имеют разную длину и который можно разрезать на три равносторонних треугольника?

б) Шестиугольник, все стороны которого имеют разную длину, разрезали на равносторонние треугольники. Какое наименьшее количество треугольников могло получиться?

в) Шестиугольник, все стороны которого имеют разную длину, разрезали на равные треугольники. Какое наименьшее количество треугольников могло получиться? (*Е. Бакаев*)

43. Какое наименьшее число клеток необходимо отметить на доске **а**) 12×12; **б**) 300×300; **в**) 99×99, чтобы не нашлось четырёхклеточного уголка, состоящего целиком из неотмеченных клеток? (*Е. Бакаев*)

44. Петя и Вася играют в такую игру. Петя пишет на доске единицу, Вася приписывает к ней слева или справа двойку, затем Петя приписывает к полученному числу слева или справа тройку и так далее. Последним ходом Петя приписывает к текущему числу слева или справа девятку. Если полученное девятизначное число кратно 11, то выигрывает Петя, иначе – Вася. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Грибалко*)

45. Найдите все такие тройки целых чисел (a, b, c), что $a^2 + 2b = 8$, $b^2 + 2c = 9$, $c^2 + 2a = 19$.

46. На основании AB равнобедренного треугольника ABC выбрана точка K так, что $BK = BC$. Из точки K опустили перпендикуляр на сторону BC, который поделил треугольник ABC на две части. У какой из частей, треугольной или четырёхугольной, периметр больше? (*Е. Бакаев*)

47. **а**) В конференции участвовали 16 человек. Каждый день некоторые из них выступали с докладами. По окончании конференции оказалось, что для каждых двух участников одного пола были два дня, в которые они оба выступали, но при этом ни для каких трёх участников такие два дня указать нельзя. Докажите, что конференция длилась не меньше 12 дней.

б) Докажите, что если в условиях пункта а) среди участников было восемь мужчин и восемь женщин, то конференция длилась не меньше 14 дней. (*А. Грибалко*)

48. Пусть I – центр вписанной окружности, BL – биссектриса треугольника ABC, O_a и O_c – центры описанных окружностей треугольников AIL и CIL соответственно. Докажите, что прямая AC касается описанной окружности треугольника O_aLO_c. (*Д. Швецов*)

49. На стене в ряд расположено несколько переключателей. Каждый может находиться в одном из четырёх положений: влево, вправо, вверх или вниз. Если какие-то три переключателя, идущие подряд, находятся в трёх разных положениях, сумасшедший электрик переключает их в четвёртое положение. Докажите, что он не может делать это бесконечно долго.

50. Положительные числа a и b таковы, что $a + b = ab$. Докажите неравенство $\frac{a}{b^2+4}+\frac{b}{a^2+4}\geq\frac{1}{2}$.

Второй тур

51. По траве вереницей вплотную друг за другом ползут гусеницы. Длина каждой гусеницы – 10 см. В 12:00 гусеницы подползли к дорожке длиной 1 м. Как только гусеница целиком оказывается на дорожке, она начинает ползти со скоростью 15 см/с, а пока хотя бы часть её на траве, она ползёт в 3 раза медленнее. Ровно в 12:01 последняя гусеница целиком сползла с дорожки. Сколько было гусениц?

52. **а**) Каждая клетка доски 10×10 покрашена в один из двух цветов – белый или чёрный. Разрешается выбрать любой прямоугольник 1×3 или 1×5 со сторонами, идущими по границам клеток, и перекрасить каждую из его клеток в противоположный цвет. Докажите, что для любой исходной раскраски всю доску можно сделать белой с помощью нескольких таких перекрашиваний.

б) Каждая клетка доски 8×8 покрашена в один из двух цветов – белый или чёрный. Разрешается выбрать любой прямоугольник 1×5 или 1×7 со сторонами, идущими по границам клеток, и перекрасить каждую из его клеток в противоположный цвет. Можно ли гарантировать, что всю доску получится сделать белой с помощью нескольких таких перекрашиваний?

в) Та же задача для доски 9×9.

г) В условиях пункта б) для доски $n \times n$ при каких n можно гарантированно сделать всю доску белой? (*Е. Бакаев, И. Раскина, М. Артемьев*)

53. По кругу стоят 15 детей. Справа от каждого мальчика стоит ребёнок в синей футболке, а слева – ребёнок в красной футболке. Каково наибольшее возможное количество мальчиков в круге? (*Е. Бакаев, Б. Френкин*)

54. Каждую сторону равностороннего треугольника разделили на n равных частей и через точки деления провели прямые, параллельные сторонам треугольника. Получилась треугольная сетка из маленьких равносторонних треугольничков. Можно ли исходный треугольник разрезать по линиям сетки на n равных фигур при каком-нибудь **а**) $n > 4$; **б**) $n > 1000$? (*М. Евдокимов*)

55. **а**) В двух корзинах лежат пирожки: в первой – 20, во второй – 22. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно взять два пирожка из любой корзины, один из них съесть, а второй переложить в другую корзину. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

б) Та же задача для трёх корзин: с 20, 1 и 7 пирожками. (*А. Грибалко*)

56. Пять человек играют в «Мафию». Среди них два мафиози, два мирных жителя и комиссар. Мафиози знают только друг друга, комиссар знает роль каждого, каждый мирный житель знает только свою собственную роль. Комиссар и мирные жители всегда говорят правду, мафиози всегда врут. Четверо сказали следующее (в указанном порядке).

А: «Я не знаю, кто мафиози».

Б: «Я не знаю, кто из нас мирные жители».

В: «Я не знаю, кто комиссар».

Г: «Я не знаю, кто комиссар».

Д не сказал ничего. Для кого из играющих можно точно определить их роли?

(*Д. Шноль*)

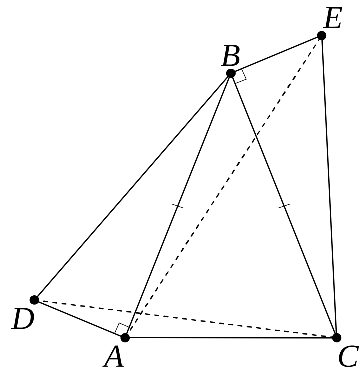
57. Никита 23 апреля сказал: «Сегодня разность между числом прожитых мною полных месяцев и числом полных лет впервые стала равна 111». Когда у Никиты день рождения?

(*С. Токарев*)

58. Петя написал несколько различных натуральных чисел с суммой **а**) 92; **б**) 100, используя только две различные цифры. Какое наибольшее количество чисел мог написать Петя? (*Е. Бакаев*, *Н. Чернятьев*)

59. На гранях кубика расставлены натуральные числа от 1 до 6 по одному разу. Назовём вершину троечницей, если в ней сходятся три грани, сумма чисел на которых кратна 3. Сколько вершин-троечниц может оказаться у кубика? (*Е. Бакаев*)

60. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC как на катетах построены вовне равные прямоугольные треугольники ABD и BCE (см. рисунок). Докажите, что из отрезков AB, AE и CD можно сложить треугольник. (*А. Пешнин*)



61. В вершинах шестиугольника написали шесть различных натуральных чисел, не превосходящих 15. На сторонах и главных диагоналях шестиугольника написали произведения чисел, стоящих в их концах. Сумма всех 15 написанных чисел оказалась равна 300. Какие числа могли быть написаны в вершинах?

62. **а**) Из бумаги вырезали пять различных треугольников. Могло ли оказаться, что среди этих треугольников есть хотя бы один непрямоугольный, а каждые два из них можно склеить по стороне так, что получится треугольник? Треугольники разрешается переворачивать.

б) Из бумаги вырезали несколько различных треугольников, удовлетворяющих условиям пункта а). Какое наибольшее количество треугольников могло быть вырезано?

(*А. Грибалко*)

63. Каждый житель острова людоедов принадлежит одному из двух племён: рыцарей, которые всегда говорят правду, или лжецов, которые всегда врут. Однажды 2017 островитян встали в круг, и каждый заявил: «Оба моих соседа – лжецы». Тут началась перебранка, и одного из островитян съели. После этого оставшиеся 2016 островитян снова встали в круг, возможно, в другом порядке, и каждый заявил: «Оба моих соседа не из моего племени». Кого съели: рыцаря или лжеца?

64. Биссектриса BD треугольника ABC отсекает от него равнобедренный треугольник BCD, а биссектриса CE отсекает от ABC тупоугольный равнобедренный треугольник CAE. Найдите углы треугольника ABC. (*А. Блинков*)

65. Точки M и N – середины сторон AB и BC остроугольного треугольника ABC соответственно. Внутри треугольника выбрана такая точка P, что $\angle APM = \angle A$ и $\angle CPN = \angle C$. Докажите, что $\angle APC = 2\angle B$. (*Е. Бакаев*)

66. Найдите все такие четвёрки чисел $a \ge b \ge c \ge d$, что $a + b + c + d = 8$, $ab + cd = 10$, $ac + bd = 5$, $ad + bc = 2$.

Третий тур

67. В лесу жили 56 зайцев, 35 лис, 24 волка и три медведя. Лес заколдовали, и теперь если лиса съедает зайца, то превращается в волка, а если волк съедает зайца, то превращается в медведя. Через год в лесу осталось только три зайца, зато медведей стало 33. А сколько лис?

68. **а**) На девяти карточках записаны все натуральные числа от 1 до 9. Одну карточку положили в центр, а остальные – вокруг неё. Оказалось, что сумма каждых четырёх чисел, лежащих подряд, делится на число в центре. Обязательно ли в центр положили карточку с числом 1?

б) На девяти карточках записаны все натуральные числа от 1 до 9. Требуется одну карточку (не ту, на которой 1) положить в центр, а остальные – вокруг неё так, чтобы сумма каждых k чисел, лежащих подряд, делилась на число в центре. При каких k от 2 до 8 это задание выполнимо?

в) На 1000 карточках записаны все целые числа от 0 до 999. Требуется одну карточку (не ту, на которой 0 или 1) положить в центр, а остальные – вокруг неё так, чтобы сумма каждых k чисел, лежащих подряд, делилась на число в центре. При скольких различных k от 2 до 999 это задание выполнимо? (*А. Блинков*, *И. Раскина*)

69. Аня познакомилась с Борей раньше, чем с Витей и Гришей. Боря познакомился с Витей раньше, чем с Аней и Гришей. Витя познакомился с Гришей раньше, чем с Аней и Борей. А с кем раньше познакомился Гриша: с Аней, Борей или Витей? (*В. Гуровиц*)

70. На доске написано натуральное число, все цифры которого различны. Кроме того, если подчеркнуть любые две его соседние цифры, то подчёркнутое двузначное число либо простое, либо точный квадрат. Какое наибольшее число может быть написано? (*М. Евдокимов*)

71. Клетки доски **а**) 8×8; **б**) 9×9 заполняют крестиками (из двух диагоналей) и ноликами (вписанная в клетку окружность) так, чтобы нарисованные фигуры не имели общих точек. Какое наибольшее число клеток может быть заполнено? (*А. Шаповалов*)

72. По окончании первого полугодия Петя подсчитал, что всего успел получить за две четверти 15 оценок по музыке, причём средняя оценка за первую четверть у него равна 3,5, а за вторую четверть – 4,5. Могло ли такое быть или Петя ошибся? (*А. Марачёв*)

73. В верхней строке таблицы ведущий игры расположил цифры от 1 до 6, каждую по одному разу. За один ход игрок (который верхнюю строку не видит) выбирает четыре столбца и ставит в них четыре цифры. Ведущий указывает, что именно угадал игрок в этих четырёх столбцах: ставит чёрный кружок за каждую цифру, которая стоит в нужном столбце, и белый кружок за каждую цифру, которая есть в этих четырёх столбцах искомой комбинации, но стоит не на своём месте. После трёх ходов были получены результаты, показанные на рисунке. Найдите расположение цифр в исходной комбинации.

?	?	?	?	?	?	
5	3	1	4			●○○
	2	5	6	3		●○
		6	4	2	1	○○○○

74. В клетчатом квадрате $n\times n$ стёрли все клетки выше главной диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний.

а) Можно ли оставшуюся «лесенку» разрезать на трёхклеточные уголки при $n=77$?

б) Найдите все $n>2$, при которых оставшуюся «лесенку» можно разрезать на трёхклеточные уголки. (*А. Грибалко*)

75. У каждого из семи гномов был кусок золота: у младшего он весил 270 г, у следующего по возрасту – 280 г, …, у старшего – 330 г. В какой-то момент двое гномов поменялись своими кусками, но потом забыли, кто с кем менялся. На глаз различить куски гномы не могут. Как им за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить, кто именно поменялся золотом? (*А. Грибалко*)

76. **а**) В лесу 20 полянок, некоторые из них соединены дорожками с односторонним движением. На каждой дорожке требуется положить несколько пирожков или поставить несколько бутылочек. Проходя по дорожке, Алиса съедает все лежащие на ней пирожки и выпивает содержимое всех бутылочек. От каждого пирожка её рост увеличивается на 1 см, а от каждой бутылочки – уменьшается на 1 см. Льюис хочет разложить пирожки и бутылочки так, что если от одной полянки к другой можно прийти несколькими способами, то рост Алисы по окончании путешествия не зависел бы от выбора пути. При любом ли расположении дорожек ему удастся это сделать?

б) В стране некоторые города связаны односторонними беспосадочными авиарейсами. Руководство авиакомпании хочет установить цены на полёты так, что если от одного города до другого можно долететь несколькими способами (возможно, с пересадками), то все способы обходились бы путешественнику в одинаковую сумму. Всегда ли получится так сделать, если цена перелётов может быть любой ненулевой (в том числе отрицательной)? (*Е. Бакаев*)

77. Биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке J. Докажите, что $AJ > BC$.

78. У Евы есть кислые и сладкие яблоки. Она даёт их Адаму по очереди: сначала все кислые, затем все сладкие. Каждое яблоко, которое получает Адам, он может съесть или выкинуть. Адаму известно, что сначала идут кислые яблоки, потом сладкие, а также то, что кислых яблок не более 2017 (точное число неизвестно), а сладких ровно k. Найдите наименьшее k, при котором Адам гарантированно может съесть больше сладких яблок, чем кислых. (*Ю. Борейко*)

79. Хозяйка испекла квадратный торт и отрезала от него несколько кусков равной площади. Первый разрез проведён параллельно стороне исходного квадрата от края до края. Следующий разрез проведён в оставшейся части перпендикулярно предыдущему и так далее. Могла ли оставшаяся в итоге часть торта иметь форму квадрата? (*Б. Френкин*)

80. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена точка D, а на стороне BC – точка E. Известно, что $AB = BC = CD$ и $AD = BD = ED$. Докажите, что AE – биссектриса треугольника ABC. (*Б. Френкин*)

81. В треугольнике ABC угол B равен 60°, O – центр описанной окружности, BL – биссектриса. Описанные окружности треугольников BOL и ABC повторно пересекаются в точке D. Докажите, что прямые BD и AC перпендикулярны. (*Д. Швецов*)

82. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите неравенство
$a\sqrt{3a^2+6b^2}+b\sqrt{3b^2+6c^2}+c\sqrt{3c^2+6a^2}\ge(a+b+c)^2$.

83. На плоскости провели несколько прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, и отметили все точки пересечения. Докажите, что отмеченные точки можно покрасить не более чем в три цвета так, что на каждой проведённой прямой каждые две соседние отмеченные точки будут покрашены в разные цвета.

84. Точка M – середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку AM пересекает катет AC в точке P, а серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает катет BC в точке Q. Найдите угол PQB, если $\angle A = \alpha$. (*Е. Бакаев*)

Финал

85. У двух малышей есть два одинаковых набора из 36 кубиков. Вася разложил свои кубики на семь кучек и утверждает, что в каждой кучке все кубики одинаковые. Гена разложил свои кубики на пять кучек и утверждает, что в каждой кучке все кубики разные. Докажите, что кто-то из них ошибается.

86. Квадрат разбит на единичные квадратные клетки. Петя разрезал его по линиям сетки на шесть частей, из которых сложил четыре квадрата разных размеров. Какие наименьшие размеры мог иметь Петин квадрат? (*Э. Акопян*)

87. **а**) Винни-Пух сел на диету и каждый день ел на одну банку варенья меньше и на одну банку мёда больше, чем в предыдущий день. Всего за время диеты он съел 264 банки варенья и 187 банок мёда. Сколько дней длилась диета?

б) Винни-Пух сел на диету и каждый день ел на две банки варенья меньше и на одну банку мёда больше, чем в предыдущий день. Всего за время диеты он съел 484 банки варенья и 275 банок мёда. Сколько дней длилась диета? (*Е. Бакаев*)

88. У мамы с папой трое детей: Аня, Боря и Света. Некоторые дети всегда говорят правду, а остальные – всегда врут. На празднике каждый ребёнок получил некоторое количество конфет, и дети принялись их делить.

Света: «Число моих конфет делится на 5».

Аня: «Если бы Боря отдал мне все свои конфеты, то у меня число конфет делилось бы даже на 25».

Боря: «А у меня всего семь конфет».

Аня: «Ты сказал неправду!»

Боря: «А мы со Светой одинаковые: либо оба говорим правду, либо оба обманываем».

Света: «Аня, не ругай Борю, у тебя же конфет на одну больше, чем у него».

На этот шум прибежал папа и сказал, что поделит конфеты на всех пятерых членов семьи поровну. Сможет ли папа выполнить своё обещание?

89. Маша и Медведь соскучились и одновременно вышли навстречу друг другу. За 10 минут Медведь прошёл $\frac{2}{15}$ расстояния между ними и ещё 300 м. А Маша за полчаса прошла на 900 м меньше, чем $\frac{1}{5}$ расстояния между ними. Через какое время после выхода они встретились?

90. Сколькими способами можно расставить по одному разу числа от 1 до 6 на места пропусков в следующем тексте так, чтобы не возникло математических противоречий? Окончания слов можно менять.

Однажды слоны сорвали __ кокосов и __ бананов, треть этих плодов съели, а остальное взяли с собой на прогулку. Каждый из этих __ слонов нёс по __ плодов. Встретив __ слоних, они отдали им все свои плоды. При этом каждой слонихе досталось по __ плодов. (*Е. Бакаев, Д. Шноль*)

91. Рая и Ада взяли по ленте и записали на них одно и то же натуральное число, все цифры которого различны и отличны от нуля. Каждая девочка разрезала свою ленту на несколько частей и сложила получившиеся числа. Разрезали они по-разному, но суммы получили одинаковые. Найдите наименьшее возможное количество цифр в этом числе. (*А. Грибалко*)

92. **а**) В одной из вершин правильного восьмиугольника сидит кролик, а в двух соседних вершинах находятся волки. За один ход каждый из них должен переместиться либо в соседнюю, либо в противоположную вершину. Ходят по очереди, первый ход делает кролик, а затем ходят оба волка. Если в какой-то момент кролик окажется в одной вершине с волком, его съедят. Волки могут находиться в одной вершине. Сможет ли кролик бегать от волков бесконечно долго, как бы они ни ходили?

б) Та же задача для правильного 30-угольника.

в) Та же задача для правильного $2n$-угольника. (*А. Грибалко*)

93. Назовём многоугольник, разбитый на белые и чёрные единичные клетки, хорошим, если в нём ровно четверть клеток чёрные. Верно ли, что любой хороший квадрат 12×12 можно разрезать на девять хороших многоугольников? (*Е. Бакаев, А. Шаповалов*)

94. **а**) На гранях двух единичных кубиков написаны натуральные числа. Петя разными способами составлял из них параллелепипед $1 \times 1 \times 2$ и каждый раз записывал сумму чисел на десяти видимых гранях кубиков. Могло ли случиться, что он записал 36 последовательных чисел?

б) Удастся ли на гранях двух единичных кубиков написать числа (не обязательно целые) так, чтобы из них можно было составить параллелепипед $1 \times 1 \times 2$ с любой целочисленной суммой от 1 до 36 на видимых гранях?

в) Удастся ли на гранях восьми одинаковых кубиков написать числа (не обязательно целые) так, чтобы из этих кубиков можно было составить куб с вдвое большим ребром с любой целочисленной суммой от 1 до 10^7 на видимых гранях? (*А. Шаповалов*)

95. Какое наибольшее количество прямых можно провести на плоскости так, чтобы среди каждых k из них нашлись две, образующие угол в 60°, если **а**) $k = 9$; **б**) k – произвольное натуральное число?

96. Вася написал на доске дробь, числитель и знаменатель которой натуральны. Вслед за ней он стал выписывать новые дроби по следующему правилу: к знаменателю предыдущей дроби прибавляется 1, она переворачивается и сокращается, если возможно. Докажите, что в какой-то момент на доске будут две одинаковые дроби. (*М. Хачатурян*)

97. Точку внутри выпуклого n-угольника соединили отрезками со всеми вершинами, разбив исходный многоугольник на n треугольников. Оказалось, что все они равнобедренные. При каких n можно утверждать, что выбранная точка равноудалена от всех вершин многоугольника? (*Е. Бакаев*)

98. Прямая разрезает равнобедренный треугольник на два равнобедренных треугольника. В каком отношении эта прямая может делить угол треугольника? (*А. Заславский*)

99. Найдите все такие тройки натуральных чисел (x, y, z), что $3^x \cdot 5^y + 1 = z(3z + 2)$.

100. В треугольнике ABC угол B равен 120°, точка M – середина стороны AC. На лучах AB и CB взяты точки K и L соответственно так, что $AK = CL$ и $\angle KML = 120°$. Докажите, что $KL = AM$. (*Е. Бакаев*)

101. **а**) В 8 «А», 8 «Б», 8 «В» классах по 20 учеников. Оказалось, что если взять по ученику из каждого класса, то среди этих трёх учеников найдутся двое знакомых. Докажите, что найдётся ученик, у которого в каком-то классе не менее десяти знакомых.

б) В 8 «А», 8 «Б», 8 «В» классах по 30 учеников. Оказалось, что если взять по ученику из каждого класса, то среди этих трёх учеников найдутся двое знакомых и двое незнакомых. Докажите, что найдётся ученик, который знает всех учеников в одном из двух других классов.

102. Пусть $a \geq b \geq c > 0$. Докажите неравенство $\dfrac{a^2 - b^2}{c} + \dfrac{c^2 - b^2}{a} + \dfrac{a^2 - c^2}{b} \geq 3a - 4b + c$.

103. Решите в целых числах уравнение $14m + 7n = 5m^2 + 5mn + 5n^2$.

104. Диагонали разрезают выпуклый четырёхугольник на подобные треугольники, причём не все они равны. Докажите, что в четырёхугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. (*Б. Френкин*)

105. Существует ли такая отличная от круга фигура, ограниченная отрезками и дугами окружностей, что все отрезки, делящие пополам её периметр, имеют одинаковые длины? (*А. Заславский*)

Источник: http://tursavin.ru