XVIII турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2012 года

Личная олимпиада

1. Астролог считает год счастливым, если в его записи используются четыре последовательные цифры. Например, следующий, 2013 год будет именно таким. А когда, по мнению этого астролога, был предыдущий счастливый год? (*Н. Нетрусова*)

2. Можно ли разрезать квадрат со стороной 1 на пять прямоугольников периметра 2? (*А. Шаповалов*)

3. **а**) Маша вышла из дома, через 12 минут оттуда же и в том же направлении вышли Миша и Тиша. Миша шёл вдвое быстрее Тиши и догнал Машу за 4 минуты. За сколько минут догнал Машу Тиша?

б) Маша вышла из дома, потом оттуда же вышел Миша и через какое-то время догнал Машу. Если бы Миша шёл вдвое быстрее, то догнал бы Машу в 3 раза быстрее. Во сколько раз быстрее Миша догнал бы Машу (по сравнению с реальным временем), если бы вдобавок Маша шла вдвое медленнее? (*Д. Шноль*)

4. Среднее арифметическое всех Володиных оценок по геометрии за четверть – целое число. Если заменить все двойки тройками, тройки – четвёрками, а четвёрки – пятёрками, то среднее арифметическое оценок снова будет целым. Что Володя получил в четверти, если известно, что не все его оценки одинаковые? (*В. Гуровиц*)

5. У Пети и Васи было по одинаковому бумажному многоугольнику. Каждый из них перегнул свой многоугольник по прямой и обвёл по контуру получившуюся плоскую фигуру (частично двухслойную). У Пети получился квадрат. Мог ли у Васи получиться остроугольный треугольник? (*А. Шаповалов*)

6. В однокруговом шахматном турнире принимали участие Ося, Нина, Проша и Зина. За победу начислялось 1 очко, за ничью – пол-очка, за поражение – 0. У каждого из игроков, кроме Зины, чего-то оказалось столько же, сколько у остальных вместе: у Оси – очков, у Нины – ничьих (в одной был пат), а у Проши – проигрышей. Восстановите результаты всех партий. (*А. Шаповалов*)

7. **а**) В треугольнике все углы измеряются целым числом градусов, причём все цифры в записи углов различны. Найдите максимально возможный наибольший общий делитель величин углов.

б) Сумма нескольких натуральных чисел равна 1000, все цифры в их записи различны. Какие значения может принимать наибольший общий делитель этих чисел? (*А. Шаповалов*)

8. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Шесть незнакомых между собой жителей острова поужинали за круглым столом при свечах так, что каждый из них разглядел и запомнил только двух своих соседей. На следующий день они снова собрались вшестером, и одному из них – Артуру – захотелось узнать, кто сидел напротив него. Он может за один вопрос узнать у любого про кого-то другого (кроме себя), спросив: «Сидел ли этот человек рядом с тобой за ужином?» Хватит ли Артуру четырёх вопросов? (*А. Шаповалов*)

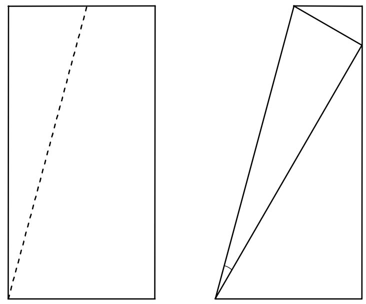
9. На доску 5×5, первоначально пустую, Петя по одной выставляет ладьи. За каждую ладью, которая в момент выставления бьёт ладей не меньше, чем свободных клеток, Петя получает рубль. Какую наибольшую сумму сможет заработать Петя? (*А. Шаповалов*)

10. Многочлен стандартного вида с одной переменной тождественно равен сумме квадратов двух двучленов. Может ли он состоять из четырёх слагаемых? (*Д. Шноль*)

11. Выпуклый четырёхугольник разбит диагоналями на четыре треугольника. Среди них есть остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. Какой вид у четвёртого треугольника? (*Б. Френкин*)

12. На шахматную доску поставили трёх коней и три ладьи так, чтобы каждая фигура била ровно одну другую и была побита ровно одной другой. Докажите, что кони друг друга не бьют. (*А. Шаповалов*)

13. Квадратный лист бумаги сложили вдвое, а затем так, как показано на рисунке. Чему равен отмеченный угол? (*Д. Шноль*)



14. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Его вписанная окружность касается сторон BC и AC в точках A_1 и B_1 соответственно, B_1D – диаметр этой окружности. Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую AC, повторно пересекает вписанную окружность в точке E. Докажите, что середина отрезка DE лежит на биссектрисе треугольника ABC. (*Д. Швецов*)

15. У Миши было квадратное уравнение с одной переменной x. Он заменил в нём x на $\frac{3x+1}{2x+1}$ и получил другое уравнение. Могло ли оказаться, что первое уравнение имеет хотя бы один корень, а второе уравнение корней не имеет? (*М. Антипов*)

16. Вписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках M и N. Нашлась такая точка K, что $KB = KC$ и $AMKN$ – параллелограмм. Докажите, что K лежит на описанной окружности треугольника ABC. (*А. Блинков, Д. Швецов*)

17. От однокругового футбольного турнира, в котором участвовали 18 команд, осталась только таблица с общим количеством забитых и пропущенных мячей: 18–18, 17–1, 16–2, …, 1–17. Докажите, что в турнире была хотя бы одна ничья. (*А. Шаповалов*)

18. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 60°, точка H – ортоцентр. Описанная окружность треугольника AHB повторно пересекает прямую AC в точке B_1, а описанная окружность треугольника AHC повторно пересекает прямую AB в точке C_1. Докажите, что точки H, B_1, C_1 лежат на одной прямой. (*Д. Швецов*)

19. Большая свеча стоит 60 рублей и сгорает за час, а маленькая стоит 11 рублей и сгорает за 11 минут. Можно ли отмерить минуту, затратив не более **а**) 200 рублей; **б**) 150 рублей? (*А. Шаповалов, Л. Медников*)

20. Докажите, что между натуральными числами n и $9n$ есть натуральное число, сумма цифр которого на 7 больше, чем у n. (*А. Шаповалов*)

21. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на три меньших треугольника так, чтобы каждый из получившихся треугольников можно было покрыть двумя другими. (*А. Шаповалов*)

22. Есть десять яблок, каждое из которых весит не более 100 г, и две одинаковые тарелки.

а) Докажите, что можно выбрать какое-то количество яблок и положить их в одну или обе тарелки так, чтобы массы в тарелках отличались меньше чем на 1 г.

б) Докажите, что можно положить в тарелки по одинаковому количеству яблок так, чтобы массы в тарелках отличались меньше чем на 2 г. (*А. Шаповалов*)

23. Квадратный трёхчлен $P(x)$ имеет различные корни, один из которых равен r. Отразив его график симметрично относительно вертикальной прямой $x = r$, получим график другого трёхчлена $Q(x)$. Сколько корней может иметь трёхчлен $P(x) + Q(x)$?

(*Б. Френкин*)

24. В ряд выписано 21 число, при этом если число y стоит между числами x и z, то $y = \frac{2xz}{x+z}$. Первое и последнее числа равны $\frac{1}{100}$ и $\frac{1}{101}$ соответственно. Найдите 15-е число.

25. Существует ли нечётное число, сумма всех делителей которого, исключая само число, больше него? (*А. Марачёв*)

26. На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Докажите, что общая хорда окружности с центром C и радиусом CA и окружности с центром M и радиусом MC проходит через середину AB. (*Ю. Блинков*)

Командная олимпиада

27. Для проведения тренировочной командной олимпиады пригласили всех желающих школьников и заранее объявили, что в каждой команде должно быть от шести до восьми человек. Когда подсчитали количество пришедших, то выяснилось, что выполнить это условие невозможно, при этом на две команды школьников хватало. Сколько человек пришло на олимпиаду? (*А. Блинков*)

28. **а**) Найдите наибольшее простое число, которое нельзя представить как сумму двух составных.

б) Найдите наибольшее натуральное число, которое нельзя представить как сумму 18 составных. (*А. Шаповалов*)

29. **а**) Барон Мюнхгаузен разрезал квадрат на квадратики двух размеров и провёл в каждом по одной диагонали. Он утверждает, что общая длина диагоналей маленьких квадратиков равна общей длине диагоналей больших. Могут ли слова барона быть правдой?

б) Домино – это прямоугольник, у которого одна сторона вдвое больше другой. Барон Мюнхгаузен разрезал квадрат на домино двух размеров и провёл в каждом по одной диагонали. Он утверждает, что общая длина диагоналей маленьких домино в полтора раза больше общей длины диагоналей больших. Могут ли слова барона быть правдой?

(*А. Шаповалов*)

30. В групповом этапе чемпионата Европы по футболу участвовали четыре команды, каждые две сыграли по одному матчу. За победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. В итоговой таблице у каждой команды, начиная со второй, оказалось на 1 очко меньше, чем у предыдущей. Восстановите исходы всех матчей. (*А. Блинков*)

31. В отряде богатырей все весят по-разному и делятся на наивных, которые всегда говорят правду, и тёртых, которые хану правды не говорят.

а) Несколько богатырей встали в круг. На вопрос хана «У тебя есть тёртый сосед легче тебя?» все ответили «Нет». После разминки они встали в круг в другом порядке. Докажите, что на вопрос хана «У тебя есть наивный сосед легче тебя?» кто-нибудь ответит «Нет».

б) Несколько богатырей встали в круг. На вопрос хана «У тебя есть тёртый сосед легче тебя?» все ответили «Да». После разминки они встали в круг в другом порядке. Докажите, что на вопрос хана «У тебя есть наивный сосед легче тебя?» кто-нибудь ответит «Да».

(*А. Шаповалов*)

32. Найдутся ли три положительных числа, одно из которых равно произведению двух остальных, другое – разности двух остальных, а третье – полусумме двух остальных?

(*А. Шаповалов*)

33. Каждая грань куба $8 \times 8 \times 8$ разбита на 64 клетки. Можно ли поверхность куба оклеить в один слой прямоугольниками 1×2 так, чтобы каждый прямоугольник покрывал ровно две клетки и у всех было **а**) ровно по шесть соседей; **б**) одинаковое чётное число соседей? Соседями считаются прямоугольники, имеющие общую границу ненулевой длины. Прямоугольники можно перегибать через рёбра куба. (*А. Шаповалов*)

34. **а**) Таблица 2×8 заполнена числами (см. рисунок). Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом Петя меняет местами два числа в клетках, соседних по вертикали, а Вася – в клетках, соседних по горизонтали. Петя выиграет, если не позднее его четвёртого хода суммы в горизонталях станут равными. Сможет ли Вася ему помешать?

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16

б) Та же задача для таблицы 2×10 (см. рисунок), если Пете для победы нужно, чтобы суммы в горизонталях стали равными не позднее его пятого хода. (*А. Шаповалов*)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

35. Петя выписал строку из трёх положительных чисел, под ней – строку из их попарных сумм, а под ней – строку из попарных произведений чисел второй строки. Числа третьей строки совпали (в каком-то порядке) с числами первой строки. Найдите эти числа. (*Б. Френкин*)

36. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает прямую AA_1 в точке K. Докажите, что прямая CK перпендикулярна одной из медиан треугольника BCB_1. (*Д. Швецов*)

37. Саша разрезал головку сыра на десять кусков и съел самый маленький по весу кусок. Затем он разрезал один из оставшихся кусков на две части и снова съел самый маленький из получившихся десяти кусков. Эту операцию – разрезание и съедение куска – он сделал ещё один раз. Какую наибольшую долю сыра мог съесть Саша? (*А. Шаповалов*)

38. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Описанные окружности треугольников AA_1B_1 и AA_1C_1 повторно пересекают прямую BC в точках K и L. Докажите, что **а**) $A_1K = A_1L$; **б**) $IK = IL$. (*Д. Швецов*)

39. В однокруговом футбольном турнире принимали участие шесть команд. За победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. По итогам турнира каждая команда, начиная со второй, набрала на 2 очка меньше, чем предыдущая. Как сыграли между собой команды, занявшие третье и последнее место? (*А. Грибалко*)

40. На описанной окружности равностороннего треугольника ABC взята точка P. Точки A_1, B_1, C_1 симметричны P относительно середин сторон BC, CA, AB. Докажите, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через центр треугольника ABC. (*А. Заславский*)

41. Графики двух приведённых квадратных трёхчленов пересекаются в точке A, а прямая l касается этих графиков в точках B и C. Известно, что $AB = AC$. Докажите, что прямая l горизонтальна. (*А. Шаповалов*)

42. Плоскость раскрасили в два цвета. Докажите, что найдётся треугольник с углами 48°, 60°, 72°, вершины которого раскрашены в один цвет. (*К. Кноп*)

43. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись такие точки D и E соответственно, что вписанная окружность четырёхугольника $BDEC$ равна описанной окружности треугольника ADE. Эти точки и окружности стёрли. С помощью циркуля и линейки восстановите стёртые точки. (*А. Шаповалов*)

44. Для всех натуральных n докажите неравенство

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)4n} < \frac{1}{8n}.$$

(*А. Заславский*)

Первый тур

45. **а**) Было 12 карточек с надписями «Слева от меня ровно одно ложное утверждение», «Слева от меня ровно два ложных утверждения», …, «Слева от меня ровно 12 ложных утверждений». Петя разложил карточки в ряд слева направо в каком-то порядке. Какое наибольшее число утверждений могло оказаться истинными?

б) Было 33 карточки с надписями «Слева от меня ровно одна карточка, где написана __», «Слева от меня ровно две карточки, где написана __», …, «Слева от меня ровно 33 карточки, где написана __». Вместо каждого подчёркивания Петя вписал «правда» или «ложь» и разложил карточки в ряд слева направо в каком-то порядке. Какое наибольшее число надписей могло стать правдой? (*А. Шаповалов*)

46. Вася отправился из пункта А в пункт Б. Он прошёл пешком $\frac{1}{5}$ часть пути, а затем сел на автобус и проехал оставшееся расстояние, что заняло по времени $\frac{1}{4}$ часть всего путешествия из А в Б. На следующий день Вася отправился из пункта Б в пункт В. Вначале он ехал на автобусе, что заняло по времени **а**) $\frac{1}{7}$ часть; **б**) $\frac{1}{5}$ часть путешествия из Б в В, а остальное расстояние прошёл пешком. Какую часть пути прошёл Вася пешком во второй день? Скорости Васи и автобуса постоянны. (*Б. Френкин*)

47. **а**) В стране имеют хождение банкноты в 60, 15, 12 и 10 динаров. Гость жил в гостинице и платил каждый день одну и ту же сумму, получая причитающуюся сдачу. Вначале у него была банкнота в 60 динаров. Мог ли гость прожить в гостинице десять дней?

б) В стране имеют хождение монеты в 1 динар, а также в $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$ динара. Гость жил в гостинице и платил каждый день одну и ту же сумму, получая причитающуюся сдачу. Вначале у него был 1 динар. Мог ли гость прожить в гостинице десять дней?

в) В стране имеют хождение монеты в 1 динар, а также в $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{6}$ динара. Гость жил в гостинице и платил каждый день одну и ту же сумму, получая причитающуюся сдачу. Вначале у него был 1 динар. Мог ли гость прожить в гостинице 14 дней? (*А. Шаповалов*)

48. При каких n клетчатый квадрат $n \times n$ можно разбить на трёхклеточные уголки и правильно раскрасить их в два цвета? Раскраска называется правильной, если уголки, имеющие общую границу ненулевой длины, раскрашены в разные цвета. (*М. Артемьев*)

49. **а**) Кощей дал Ивану-царевичу куб, плотно лежащий в коробке без крышки. Иван должен расставить на всех рёбрах куба и на всех рёбрах коробки стрелки. После этого Кощей повернёт куб, как захочет, и положит его в коробку. Если при этом совпадут направления ровно на шести рёбрах куба и соответствующих рёбрах коробки, то Иван будет свободен, а иначе – голову с плеч. Сможет ли Иван спастись?

б) Можно ли на всех рёбрах трёх одинаковых кубов расставить стрелки так, чтобы при любом совмещении двух из них направления ровно шести стрелок совпадали?

в) Куб плотно лежит в коробке без крышки. На всех рёбрах куба и на всех рёбрах коробки нарисованы стрелки. Известно, что как ни положить куб в коробку, на примыкающих рёбрах совпадут направления ровно n стрелок. Чему может быть равно n? (*А. Блинков, И. Раскина*)

50. Перед Петей и Васей лежит по кучке из 100 монет. Ребята ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять из чужой кучки одну или несколько монет и переложить в свою кучку. Нельзя брать столько монет, сколько уже брал кто-либо из игроков одним из предыдущих ходов. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

51. Решите ребус FOOLS + ROADS = RUSSIA. (*К. Кноп*)

52. У Мальвины были золотые кольца массами 1 г, 3 г, 4 г, 6 г, 8 г, 9 г, 11 г, 12 г и 16 г. Алиса и Базилио украли по четыре кольца. При этом Алисе досталось втрое больше золота, чем Базилио. Сколько весит оставшееся кольцо?

53. В турнире участвуют 64 боксёра разной силы. Можно ли за 70 боёв выявить двух сильнейших?

54. В левой нижней клетке шахматной доски стоит фишка. Её можно передвигать либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, либо на одну клетку по диагонали влево-вниз. Можно ли, двигая фишку таким образом, обойти все клетки доски, побывав на каждой по одному разу?

55. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 27. Два игрока по очереди вычёркивают по одному числу, пока не останется два числа. Если их сумма кратна 5, то выигрывает первый игрок, иначе – второй. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

56. Пусть O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников, на которые медиана BM разбивает прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. Найдите угол O_1BO_2. (*Д. Швецов*)

57. После нескольких игровых дней однокругового турнира выяснилось, что каждые пять команд можно расположить по кругу так, чтобы рядом находились только уже сыгравшие друг с другом команды. Докажите, что турнир можно завершить за три дня (в один день команда может играть не более одного раза). (*С. Волчёнков*)

58. **а**) Найдите все квадратные трёхчлены с целыми коэффициентами, у которых сумма корней равна их произведению и равна дискриминанту.

б) Та же задача, но коэффициенты трёхчлена не обязательно целые. (*А. Блинков*)

59. Докажите, что для любого натурального n все натуральные числа от 1 до n можно выписать в ряд так, чтобы каждое число, начиная со второго, было делителем суммы всех предыдущих. (*И. Акулич*)

60. В треугольнике ABC угол B равен 60°, точка O – центр описанной окружности, H – ортоцентр, M – середина стороны AC, N – середина отрезка OB. Докажите, что прямые MN и OH перпендикулярны. (*Д. Швецов*)

61. В угловой клетке доски 100×100 стоит король. Им можно делать ходы так, чтобы расстояние от центра начальной клетки до центра той, в которой находится король, после каждого хода увеличивалось. Какое наибольшее число ходов можно сделать, соблюдая это условие? (*А. Грибалко*)

62. В квадрате $ABCD$ точки E и F – середины сторон BC и CD соответственно. Прямые AE и BF пересекаются в точке G. Прямая AE повторно пересекает описанную окружность квадрата в точке H. Докажите, что $GE = EH$. (*Н. Москвитин*)

63. Существуют ли такие функции $f(x)$ и $g(x)$, определённые для всех действительных x, что $f(g(x)) = x + 1$ при всех x, а $g(f(x))$ не равно $x + 1$ ни при каких x? (*А. Блинков*)

64. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы DAB, CAB, ABC, BDA равны 45°, 15°, 120°, 90° соответственно. Найдите угол CDA.

65. В треугольнике ABC точки I и O – центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Точки A' и B' на лучах BC и AC таковы, что $A'B = AB = AB'$. Докажите, что прямые IO и $A'B'$ перпендикулярны. (*А. Заславский*)

66. Решите в натуральных числах систему уравнений $\begin{cases} m - n = 2012, \\ \text{НОД}(m, n) + \text{НОК}(m, n) = m + n. \end{cases}$

67. Берутся произведения всевозможных наборов из 2011 натуральных чисел от 1 до 2010 (не обязательно различных), а далее находится сумма этих произведений. Найдите остаток от деления этой суммы на 2011. (*А. Юрков*)

Второй тур

68. В натуральном числе n цифры идут слева направо в возрастающем порядке. Чему равна сумма цифр числа $9n$? (*С. Волчёнков*)

69. Ире принесли семь драгоценных камней разной массы. Прибор «РИВ-6» умеет за одно испытание выбрать из шести камней два средних по массе.

а) Как за пять испытаний Ира сможет найти средний по массе камень из семи?

б) За какое наименьшее число испытаний Ира сможет гарантированно найти средний по массе камень из семи? (*В. Трушков, И. Руденко*)

70. Трёхмерная доска $18 \times 18 \times 18$ состоит из кубических клеток. Параллельные граням слои считаются плоскими досками 18×18. Слон ходит по диагонали в любой из этих плоских досок. Докажите, что если слон может попасть из клетки A в клетку B, то он может сделать это не более чем за три хода. (*М. Артемьев, К. Кноп, А. Шаповалов*)

71. По кругу написаны натуральные числа, причём каждое равно сумме или разности своих соседей. Докажите, что количество чисел на круге делится на 3.

72. Дата 21.02.2012 читается одинаково слева направо и справа налево. Сколько всего таких дат в XXI веке? (*А. Шаповалов*)

73. В однокруговом футбольном турнире за победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. По итогам турнира все команды набрали разное число очков.

а) Могло ли случиться, что разность забитых и пропущенных мячей у каждой команды тем больше, чем меньше очков она набрала?

б) При каком наименьшем числе ничьих возможна ситуация, указанная в пункте а)?

в) При каком наименьшем числе команд возможна ситуация, указанная в пункте а)? (*А. Заславский, А. Шаповалов, Б. Френкин*)

74. **а**) На всех клетках доски 1×2011, кроме крайних, стоит по шашке. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Ход – это прыжок шашки ровно через одну шашку на одну из свободных клеток, перепрыгнутая шашка при этом снимается. Центральная шашка отмечена. Выигрывает тот, кто снимет отмеченную шашку (отмеченная шашка тоже может ходить). Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

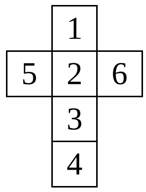
б) Игровое поле – бесконечная полоска шириной в одну клетку. На 100 идущих подряд клетках стоит по шашке. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Ход – это прыжок шашки ровно через одну шашку на одну из свободных клеток, перепрыгнутая шашка при этом снимается. Одна из двух центральных шашек отмечена. Выигрывает тот, кто снимет отмеченную шашку (отмеченная шашка тоже может ходить). Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

75. В теремке было 100 конфет. Пришла мышка и съела некоторое количество конфет. Но тут пришла лягушка, и мышка съела ещё одну конфету, чтобы количество оставшихся делилось поровну на двоих. Потом пришли по очереди зайчик, лисичка, волк и медведь, и каждый раз мышка съедала по одной конфете, чтобы то, что осталось, делилось поровну на всех собравшихся. После этого пришёл слон. Какое наименьшее количество конфет придётся съесть мышке на этот раз, чтобы количество оставшихся делилось поровну на семерых? (*И. Раскина*)

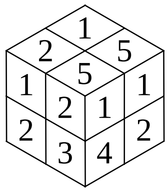
76. Все гномы делятся на рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда врут. На каждой клетке доски 4×4 стоит по гному, среди них есть и рыцари, и лжецы. Каждый гном заявил: «Среди моих соседей поровну рыцарей и лжецов» (соседями считаются гномы, находящиеся на клетках с общей стороной). Сколько всего лжецов на доске? (*А. Шаповалов*)

77. Можно ли квадратный лист бумаги со стороной 1 м разрезать на 30 квадратов так, чтобы хотя бы один из квадратов имел сторону меньше 1 мм?

78. На классной доске написали два числа: с левой стороны – 2012, а с правой – 1000. За один ход можно прибавить к числу, написанному с левой стороны, некоторое натуральное число, а число, написанное с правой стороны, умножить на то же самое число. Можно ли уравнять числа на разных сторонах доски, сделав не более 1000 ходов? (*А. Штерн*)



79. Карандаш раскрасил деревянный куб в соответствии с развёрткой (см. рисунок, где цифры означают цвета). Самоделкин распилил его на восемь кубиков, у каждого из которых три грани окрашены, а три – нет, и составил из них новый куб, вся поверхность которого окрашена. Гурвинек смотрит на куб и видит, конечно, не все грани, а только три, повёрнутые к нему (см. рисунок), но утверждает, что знает, какой кубик находится в дальнем от него углу. Какой именно?



80. **а**) Из шести палочек длины 1 м сложили треугольную пирамиду. На палочках сидят три паука, при этом расстояние между каждыми двумя (измеряемое кратчайшим путём по рёбрам пирамиды) не меньше R. При каком наибольшем R такое возможно? (*А. Шаповалов*)

б) Паутина представляет собой правильный шестиугольник со стороной 1, в котором проведены все диагонали, проходящие через центр. На паутине сидят семь пауков. Расстоянием между пауками называется длина кратчайшего пути между ними по паутине. Докажите, что расстояние между какими-то пауками не больше 1. (*К. Кноп*)

81. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AB = BD$ и $AC = AD$. Какая сторона является большим основанием трапеции? (*Б. Френкин*)

82. Целые числа a, b, c таковы, что уравнение $(x + a)(x + b)(x + c) + 5 = 0$ имеет целый корень. Докажите, что других целых корней у него нет.

83. На доске написаны некоторые числа. На каждом шаге выбираются два числа a и b и заменяются на числа $3a - b$ и $13a - 3b$.

а) Вначале на доске были написаны числа 1, 2, …, 32. Можно ли за несколько шагов получить на доске числа 2, 4, …, 64?

б) Вначале на доске были написаны числа 1, 2, …, 2012. Можно ли за несколько шагов получить на доске числа 2, 4, …, 4024?

84. Муравей стартовал из угла шахматной доски. Ему разрешено пересекать каждую клетку по диагонали, но запрещено бывать внутри одной клетки дважды, выходить за пределы доски и ползать вдоль границ клеток. Внутри какого наибольшего числа клеток он может побывать? (*А. Шаповалов*)

85. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и BL. На луче AK взята точка P так, что $PB = PL$, а на луче BL – точка Q так, что $QA = QK$. Докажите, что прямые KQ и LP параллельны.

86. Выпуклый четырёхугольник разбит диагоналями на треугольники. Из 12 углов этих треугольников как минимум семь равны α. Какие значения может принимать α?

(*Б. Френкин, К. Кноп*)

87. Хорда BP описанной окружности треугольника ABC пересекает сторону AC в точке Q. Точки O_a и O_c – центры описанных окружностей треугольников APQ и CPQ соответственно. Докажите, что прямые AO_a и CO_c пересекаются на прямой, содержащей высоту треугольника ABC. (*Д. Швецов*)

88. В треугольнике ABC угол B равен 60°, точка H – ортоцентр. Серединные перпендикуляры к отрезкам AH и CH пересекают прямую AC в точках A_1 и C_1. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1HC_1 лежит на биссектрисе треугольника ABC. (*Д. Швецов*)

89. Дана бесконечная последовательность пифагоровых треугольников (прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами). Гипотенуза каждого из них служит катетом следующего. Может ли в этой последовательности быть бесконечно много треугольников, подобных египетскому (треугольнику со сторонами 3, 4, 5)? (*Б. Френкин*)

90. На Мишином плеере при нажатии кнопки «вперёд» номер текущей песни увеличивается, но не более чем на 2, а при нажатии кнопки «назад» – уменьшается не более чем на 2. Переходы на каждую из возможных песен происходят с ненулевой вероятностью (то есть если достаточно много раз нажать кнопку, начав с одной и той же песни, то каждый переход случится хотя бы один раз). Миша нажал кнопку «вперёд», и песня сменилась. Как ему узнать, на сколько увеличился номер песни? Разрешается сколько угодно жать кнопки, но нельзя просто дослушать песню и подождать, что будет дальше. Песни, о которых идёт речь, расположены «достаточно далеко» от концов ленты. (*М. Артемьев*)

Третий тур

91. В Зазеркалье имеют хождение монеты достоинством 7, 13 и 25 гиней. Алиса заплатила за пирожок несколько монет и получила сдачу на две монеты больше.

а) Могла ли покупка стоить 100 гиней?

б) Могла ли покупка стоить 60 гиней?

в) Какова наименьшая возможная стоимость покупки? (*А. Шаповалов*)

92. Сумма трёх натуральных чисел равна 520. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться их произведение?

93. В некоторый момент Таня измерила угол между часовой и минутной стрелками часов. Через полчаса она опять измерила угол между стрелками, и он оказался тем же самым. Чему может быть равен этот угол?

94. В однокруговом турнире матбоёв участвовали 16 команд из 16 разных школ. Каждый бой проходил в одной из школ-участниц. В газете написали, что каждая команда сыграла во всех школах, кроме своей. Докажите, что журналисты ошиблись. (*Ю. Лифшиц*)

95. Есть 720 спичек, разложенных в 100 кучек. Два игрока ходят по очереди. Каждым ходом выбирается кучка, делится на две меньшие части, и эти части сливаются с двумя из оставшихся кучек. Если после хода одного из игроков во всех кучках станет поровну спичек, он выигрывает. Если же останется всего две кучки и они не будут равны, то сделавший последний ход игрок проигрывает. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

96. Каждый мальчик съел по одной конфете, пять котлет и три омлета, а каждая девочка – по шесть конфет, две котлеты и четыре омлета. Всего они съели 220 конфет и котлет вместе взятых. А сколько омлетов?

97. Петя разрезал шахматную доску по границам клеток на части одинакового периметра. Оказалось, что не все части равны. Каково наибольшее возможное число частей? (*А. Шаповалов*)

98. Могут ли семь слонов побить все клетки доски 4×10? (*А. Шаповалов*)

99. Старик Хоттабыч может совершить чудо, вырвав из своей волшебной бороды один волос. При этом на месте двух вырванных волос вырастает один новый. Сколько всего чудес может совершить старик Хоттабыч, если первоначально в его бороде 2012 волос?

100. Саша живёт в своём доме, в котором окон на два больше, чем дверей. Все братья Саши – Петя, Коля и Лёня – тоже живут каждый в своём доме. В доме Пети окон на четыре больше, чем дверей, а в доме Коли окон на пять больше, чем дверей. Может ли в домах у всех братьев Лёни в сумме окон быть в 4 раза больше, чем дверей?

101. Можно ли расставить по кругу цифры 0, 1, …, 9 так, чтобы сумма каждых трёх идущих подряд цифр не превышала 13?

102. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда велосипедист догнал пешехода, мотоциклист отставал от них на 6 км. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда мотоциклист догнал пешехода?

103. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут, – всего девять человек. Каждый их них сказал: «Мои соседи – рыцарь и лжец». Сколько среди них лжецов?

104. На доске было написано равенство. Дежурный по классу успел стереть некоторые цифры (сколько цифр он стёр, неизвестно). На доске осталось:
$1127\ldots173\cdot1017\ldots565=1126\ldots745$. Могло ли исходное равенство быть верным?

105. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC взяты точки P и Q соответственно так, что $\angle QAC=\frac{1}{3}\angle BAC$ и $\angle PBC=\frac{1}{3}\angle ABC$. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке T. Докажите, что $TP=TQ$.

106. Докажите, что сумма всех семизначных палиндромов делится на 9.
(*А. Шаповалов*)

107. В тридевятом царстве 2012 городов. Царь Горох хочет открыть некоторое количество двусторонних авиалиний между городами так, чтобы из каждого города выходило не более 11 линий и от каждого города можно было добраться до любого другого, сделав не более шести пересадок. Каким наименьшим количеством авиалиний сможет обойтись царь? (*В. Трушков*)

108. Кузнец Емельян сделал набор из четырёх железных и одной золотой гирьки, где золотая по массе не меньше каждой из железных. Известно, что любой целый вес от 1 г до 10 г можно набрать одной или несколькими гирьками набора. Какое наименьшее количество золота мог потратить кузнец? (*А. Шаповалов*)

109. Докажите, что если числа a^2-a и a^4-a целые, то и a – целое число. (*К. Кноп*)

110. За круглым столом сидело несколько жителей острова рыцарей и лжецов. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут. Путешественник спросил каждого про его соседей. Каждый ответил: «Оба моих соседа – лжецы». Путешественник сказал: «Если бы вас было на одного меньше или на одного больше, я бы смог узнать, сколько среди вас рыцарей. А так не могу». Сколько человек было за столом? (*Д. Шноль*)

111. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а на стороне AD выбрана такая точка K, что $AK=2$ и $KD=1$. Оказалось, что $\angle ACK=30°$. Найдите длину отрезка OK.

112. Имеется 20 фишек и доска 10×10. Фишки разбиты на пары, пронумерованные числами от 1 до 10. Можно ли расставить фишки на доске так, чтобы на каждой горизонтали и на каждой вертикали находились две фишки, а кратчайший путь ладьи между фишками каждой пары был равен их номеру? (*А. Грибалко*)

113. Восстановите треугольник ABC по двум точкам: его ортоцентру H и центру вписанной окружности I, если известно, что $\angle A=60°$, а радиус описанной окружности равен R. (*Г. Филипповский, А. Заславский*)

114. Дан треугольник ABC, в котором $AB>AC$. Точка P – середина дуги BC его описанной окружности, содержащей точку A. Рассматриваются всевозможные вписанные четырёхугольники $APMN$, где точки M и N лежат на сторонах AB и AC соответственно. Найдите геометрическое место точек пересечения отрезков BN и CM. (*Ю. Блинков*)

115. Пусть a и b – положительные числа, а n – натуральное число, большее 1. Докажите, что если $x > 0$ и $x^n \le ax + b$, то $x < \sqrt[n-1]{2a} + \sqrt[n]{2b}$.

116. Дано натуральное число a, большее 1. Найдите такую арифметическую прогрессию с первым членом a и содержащую два числа из набора a^2, a^3, …, a^{18}, чтобы её разность была наибольшей (не обязательно целой).

117. Есть m тортов, каждый из которых весит 1 кг. Необходимо разделить их поровну между n школьниками, где $m < n$. Докажите, что это всегда можно сделать так, чтобы каждый кусок, получившийся при дележе, весил не меньше $\frac{m}{3n}$ кг. (*К. Кноп, И. Богданов*)

118. Пусть p – нёчетное простое число. Для всех натуральных k от 1 до $p-1$ нашли целую часть выражения $\frac{k^3}{p}$. Докажите, что сумма полученных чисел равна $\frac{(p^2-1)(p-2)}{4}$. (*Д. Достер*)

119. Докажите, что из любого треугольника площади 4 можно вырезать осесимметричную фигуру площади более 3. (*А. Шаповалов*)

Финал

120. В дремучем лесу вот уже более 1000 лет стоит волшебная ёлка. Известно, что каждое утро на ней вырастает 100 иголок и каждая иголка живёт ровно 4 года, а затем отмирает. Сколько же сегодня иголок на волшебной ёлке?

121. За одно нажатие кнопки можно увеличить число на экране калькулятора на его дробную часть.

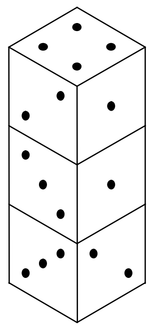
а) Начав с положительного числа, меньшего 1, за три нажатия получили число 3. С какого числа начали?

б) Начав с положительного числа, меньшего 1, за десять нажатий получили число 10. С какого числа начали? (*А. Шаповалов*)

122. На доске написаны два числа: 1 и 2. За один ход разрешается увеличить любое число на доске на сумму цифр второго. Можно ли добиться, чтобы оба числа стали равны 2012? (*А. Шаповалов*)

123. **а**) Девять гномов трижды становились по одному в клетки квадрата 3×3, и каждый раз гномы, оказавшиеся в соседних по стороне клетках, здоровались. Докажите, что какие-то два гнома так и не поздоровались.

б) Какое наибольшее количество раз можно расставить натуральные числа от 1 до 9 в клетки квадрата 3×3 так, чтобы каждые два числа оказывались в соседних по стороне клетках не более одного раза? (*А. Грибалко*)



124. Три одинаковых кубика поставили друг на друга, как показано на рисунке. На гранях каждого кубика нарисованы точки: от одной до шести (каждое число встречается по разу). Сколько всего точек расположено на шести горизонтальных гранях кубиков?

125. На конгрессе было три секции: лекари, колдуны и знахари. По кругу выстроились 112 участников конгресса, среди которых лекарей и знахарей поровну. На вопрос «Верно ли, что оба твоих соседа из одной секции?» каждый ответил «Да». Лекари всегда говорят правду, колдуны всегда врут, а знахари врут, если стоят рядом с колдуном, иначе говорят правду. Могло ли в этом круге быть 66 колдунов? (*А. Шаповалов*)

126. Произведение нескольких натуральных чисел равно 224, причём самое маленькое число вдвое меньше самого большого. Сколько сомножителей в этом произведении? (*А. Сгибнев*)

127. Разложите 100 орехов на десять кучек так, чтобы в них было разное число орехов, но при этом никакую из кучек нельзя было бы разбить на две так, чтобы число орехов во всех 11 кучках оставалось различным. (*А. Шаповалов*)

128. Квадратный торт массой 900 г разрезали двумя прямолинейными разрезами, параллельными одной паре сторон, и двумя прямолинейными разрезами, параллельными другой паре сторон. Докажите, что Паша сможет выбрать из девяти получившихся кусков три, не имеющие общих сторон, суммарная масса которых не меньше 300 г.

129. Мама пекла блины, а четверо детей их ели, каждый со своей скоростью. Получив сначала по блину, дети начали есть одновременно. Как только ребёнок съедал блин, он получал ещё один. Каждый хоть раз получил добавку. Наконец, мама объявила, что больше блинов не будет. Дети доели то, что у каждого оставалось, и закончили одновременно. Известно, что до этого не было момента, когда бы одновременно заканчивали есть блины двое или больше детей. Какое наименьшее число блинов могла испечь мама? (*А. Шаповалов*)

130. На доске **а**) 3×10; **б**) 3×12 отметили восемь клеток так, что их центры являются вершинами двух прямоугольников со сторонами, параллельными краям доски. Докажите, что среди отрезков, соединяющих центры отмеченных клеток, найдутся три одинаковых. (*А. Грибалко*)

131. Точка E – середина стороны BC квадрата $ABCD$, а F – такая точка на диагонали AC, что $AF : FC = 3 : 1$. Найдите угол между прямыми AE и DF. (*Д. Прокопенко*)

132. Пять монет лежат в ряд, две из них фальшивые – они весят одинаково и легче настоящих. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, сколько настоящих монет лежит между фальшивыми? (*А. Шаповалов*)

133. Откопав клад из **а**) 100 алмазов; **б**) 2012 алмазов, каждый из семи гномов схватил столько алмазов, сколько успел. Если у одного из гномов алмазов меньше, чем у каждого из остальных, он обижается, и все остальные, по древнему обычаю, должны отдать ему по одному алмазу. Этот процесс надо повторять, пока кто-либо из гномов обижается. Докажите, что передел клада рано или поздно закончится. (*А. Артемьев, И. Раскина*)

134. Все углы равностороннего выпуклого пятиугольника различны. Докажите, что наименьший и наибольший из них соседние. (*Д. Джукич*)

135. Прибор «Сложномер» представляет любое натуральное число в виде произведения простых чисел (не обязательно различных) и выдаёт количество сомножителей в таком представлении. Например, для $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$ «Сложномер» выдаёт число 3. Прибор стали последовательно применять к натуральным числам, начиная с 2. В какой-то момент прибор впервые выдал число, большее 2012. Докажите, что следующее выданное число меньше 2013. (*Б. Френкин*)

136. Есть десять внешне одинаковых монет. Суд знает, что их массы равны 1 г, 2 г, …, 10 г. Эксперт знает точную массу каждой монеты. У него есть чашечные весы, которые показывают равновесие (загорается лампочка) или неравновесие, но не показывают, какая чаша тяжелее. Может ли эксперт провести три взвешивания так, чтобы по их результатам суд мог однозначно определить массу каждой монеты? (*А. Шаповалов*)

137. В ряд лежат 300 апельсинов, массы каждых двух соседних отличаются не более чем на 10 г. Докажите, что их можно разложить в пакеты по три штуки и положить пакеты в ряд так, чтобы массы каждых двух соседних пакетов отличались не более чем на 10 г. (*А. Шаповалов*)

138. У Данилы есть простое число p. Он считает натуральное число k хорошим, если k^2+p раскладывается на множители, большие k. Три хороших числа Данила нашёл. Докажите, что он, если постарается, найдёт и четвёртое. (*М. Антипов*)

139. Пункты А, Б, В соединены прямыми дорогами (между каждыми двумя городами есть хотя бы одна дорога). Известно, что между А и Б есть всего 127 маршрутов (прямых и через В), а между А и В – 164 маршрута (прямых и через Б). Сколько всего маршрутов между Б и В (прямых и через А)? (*А. Шаповалов*)

140. Около квадрата $ABCD$ описана окружность. На меньшей дуге BC взяли произвольную точку P. Отрезок AP пересекает сторону BC в точке K, а диагональ BD – в точке L. Отрезок DP пересекает сторону BC в точке M, а диагональ AC – в точке N. Докажите, что отрезки KN и LM перпендикулярны.

141. Из колоды отложили часть карт. Докажите, что оставшиеся карты можно разделить между двумя игроками так, чтобы у них общее число карт, число карт каждой масти и число карт каждого достоинства отличалось не более чем на 1. (*А. Шаповалов*)

142. Дан треугольник ABC. На стороне AC выбираются произвольная точка K и такая точка L, что $\angle ABK=\angle CBL$. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников KBL. (*Д. Швецов*)

143. К гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC проведена высота CH. Вне треугольника построены равносторонние треугольники AHA_1 и BHB_1. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1B_1C лежит на отрезке AB. (*Д. Швецов*)

144. В прямоугольной таблице клетки нумеруются по порядку: сначала первая строка слева направо, затем вторая строка слева направо и так далее. Барон Мюнхгаузен утверждает, что для каждого натурального n может предъявить такую таблицу, разрезанную на n частей с равными суммами номеров клеток. Могут ли слова барона быть правдой? (*А. Шаповалов*)

145. Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных чисел (m, n), что m и n имеют одинаковые наборы простых делителей и $m-1$ и $n-1$ также имеют одинаковые наборы простых делителей.

146. Положительные числа a, b, c таковы, что $(a+b)(b+c)(c+a)=8$. Докажите неравенство $\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[27]{\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}}$.

Источник: http://tursavin.ru