XV турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 **июня** - 2 **июля** 2009 **года**

Личная олимпиада

1. Мистер Твистер получил в наследство несколько фабрик. За его жизнь семь фабрик разорились, а остальные он разделил поровну между своими семью сыновьями. Младший сын за свою жизнь пустил на ветер шесть фабрик, а остальные разделил между своими семью сыновьями. Его младший сын продал с молотка пять фабрик, но остальные по семейной традиции разделил между своими семью сыновьями. При жизни его младшего сына разорились четыре фабрики, но когда дело дошло до наследства, делить оставалось нечего – у прогоревшего дельца оставалась всего одна фабрика. Сколько фабрик получил в наследство мистер Твистер? (*А. Хачатурян*)

2. Нарисуйте на клетчатой бумаге треугольник и шестиугольник с вершинами в узлах сетки так, чтобы они имели одинаковые периметры. (*К. Скопцов*)

3. Есть одна золотая, три серебряных и пять бронзовых медалей. Известно, что одна из них фальшивая – она легче настоящей. Настоящие медали из одного металла весят одинаково, а из разных – не одинаково. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую медаль? (*А. Шаповалов*)

4. У Пети есть десять карточек с числами 1, 2, …, 10 и пять палочек для дробных черт. Может ли Петя из всего этого составить пять обыкновенных дробей так, чтобы никакая из них не равнялась целому числу, а сумма всех пяти дробей была целой? (*А. Шаповалов*)

5. Можно ли из бумажного квадрата со стороной 4 см вырезать несколько кругов, сумма радиусов которых больше 11 см?

6. На доске написаны числа 1, 2, …, 1000. На каждом этапе одновременно стираются все числа, имеющие среди нестёртых чисел ровно один делитель (например, на первом этапе стирается только число 1). Какие числа будут стёрты на последнем этапе?

7. Пять мудрецов играют в «Мафию». Среди них два мафиози, два мирных жителя и комиссар. Мафиози знают только друг друга, каждый мирный житель знает только свою собственную роль, комиссар знает роль каждого. Мафиози могут говорить что угодно, остальные говорят только то, в чём сами уверены. Состоялся следующий разговор.

А: «Д – мирный житель».
Б: «Нет, Д – мафиози».
В: «Д не знает, кто я».
Г: «Д знает, кто я».
Д: «Б – мафиози».

Для кого из играющих можно точно определить их роли? (*И. Раскина*)

8. В угловых клетках шахматной доски стоят четыре ладьи. Ладьёй можно делать ход только до упора в другую ладью или в край доски. Можно ли собрать все ладьи в четырёх центральных клетках? (*А. Шаповалов*)

9. Известно, что ребус ЯМА + ЯМА + … + ЯМА = ЯМИЩА имеет решение. Какое наименьшее количество «ям» может равняться «ямище»? (*М. Ахмеджанова*)

10. Вася убедил учительницу повысить ему оценку за итоговую контрольную в первой четверти с двойки на тройку, и его средний балл за первую четверть увеличился на a. После того как он проделал то же самое во второй четверти, его средний балл за вторую четверть увеличился на b. На сколько в результате увеличился его средний балл за первое полугодие?

11. У трёх братьев – Антона, Бори и Васи – дни рождения совпадают. Оказалось, что когда Антону исполнится 12 лет, сумма возрастов двух других братьев разделится на 12. То же самое случится, когда 12 лет исполнится Боре. Докажите, что так же будет, когда 12 лет исполнится Васе. (*А. Шаповалов*)

12. Имеется девять одинаковых на вид монет: пять тяжёлых одной массы и четыре лёгких одной массы. Они выложены по кругу. Известно, что есть ровно одна пара тяжёлых монет, находящихся рядом. Как найти её за два взвешивания на чашечных весах без гирь? (*А. Шаповалов*)

13. Три сталкера дошли до Каменной Аномалии. Оттуда к кладу ведёт прямая тропа длиной 100 м. Сталкеры знают, что первый пошедший по тропе окаменеет в произвольном месте, такая же участь ждёт и второго. Оба оживут в тот момент, когда третий будет идти по тропе и суммарное расстояние от него до двух окаменевших спутников будет равно 100 м. Могут ли все сталкеры добраться до клада без риска окаменеть навсегда? (*А. Блинков, И. Раскина*)

14. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BD. Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно BD, пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что $BK = 2CD$.

15. Назовём натуральное число n неудачным, если произведение первых n натуральных чисел не делится на их сумму. Могут ли два неудачных числа идти подряд? (*Б. Френкин*)

16. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может для некоторого $N > 1$ так переставить числа 1, 2, …, N в некотором порядке и затем выписать их все подряд без пробелов, что в результате получится многозначный палиндром. Могут ли слова барона быть правдой? (*А. Шаповалов*)

17. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая a. Окружности ω_1 и ω_2 касаются прямых a, BC и сторон AB и AC соответственно (с внешней стороны для треугольника ABC). Пусть B_1 и C_1 – точки касания окружностей ω_1 и ω_2 с прямой BC. Докажите, что расстояние между точками B_1 и C_1 не зависит от выбора прямой a. (*Д. Прокопенко*)

18. На клетчатой бумаге нарисован **а**) 100-угольник; **б**) 222-угольник со сторонами по линиям сетки. Из какого наименьшего числа клеток может состоять этот многоугольник? (*А. Шаповалов*)

19. Известно, что произведение пяти действительных чисел: трёх коэффициентов квадратного уравнения и двух его корней – положительно. Сколько положительных чисел может быть среди этих пяти? (*Б. Френкин*)

20. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC, а точка J – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что точка I симметрична ортоцентру треугольника JBC относительно середины стороны BC. (*Ю. Блинков*)

21. Три бегуна стартовали одновременно из одной точки и бегут каждый со своей постоянной скоростью в одном направлении. Вслед за ними через некоторое время выехал тренер на мотороллере и, двигаясь с постоянной скоростью, догнал самого быстрого бегуна, развернулся, доехал до самого медленного, развернулся и ещё раз догнал самого быстрого. Таким образом, тренер трижды проезжал мимо среднего бегуна и по два раза был возле остальных бегунов. Известно, что в первый раз время тренера на езду от среднего бегуна до самого быстрого оказалось равно времени от разворота возле самого медленного бегуна до обгона среднего. Докажите, что тренер проезжал мимо среднего бегуна через равные промежутки времени. (*А. Шаповалов*)

22. Три окружности проходят через точку P и попарно пересекаются в точках A, B, C. Известно, что центр одной окружности лежит на прямой AP, а центр другой – на прямой BP. Докажите, что центр третьей окружности лежит на прямой CP. (*Б. Френкин*)

23. Можно ли все натуральные числа от 1 до 2009 разбить на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равнялась произведению чисел в другой группе? (*А. Шаповалов*)

Командная олимпиада

24. Два отрезка, параллельные сторонам прямоугольника, разбили его на четыре меньших прямоугольника. Периметры трёх из них равны 3 см, 4 см и 5 см. Чему может быть равен периметр исходного прямоугольника?

25. На столе лежат n кусков сыра. Петя съедает наименьший по массе кусок. Затем он режет один из оставшихся на столе кусков на две части и снова съедает самый маленький из получившихся n кусков. Эти действия – разрезание и съедение куска – Петя повторяет, пока не съест $n-1$ кусок. Докажите, что Петя съест не более половины сыра, если **а**) $n=3$; **б**) $n=10$. (*А. Шаповалов*)

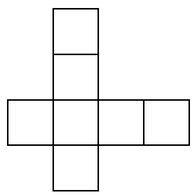
26. Есть девять одинаковых на вид монет, одна из них фальшивая – она легче настоящих. Одна из монет прилипла к одной из чаш весов без гирь, и снять её нет возможности. Как за два взвешивания найти фальшивую монету? (*А. Шаповалов*)

27. Среди всех решений ребуса ДЕЦЛ = МАЛ + ДА + УДАЛ найдите то, в котором ДЕЦЛ имеет наименьшее значение. (*М. Ахмеджанова*)

28. На Сириусе в неделе семь дней, их названия и порядок совпадают с земными, а в каждом году одинаковое число дней, отличное от земного. Сегодня на Сириусе вторник и у сирианца Васи день рождения. Четыре года назад он справлял свой день рождения в четверг. На какой день недели может выпасть день рождения у Васи через год? (*А. Щепин*)

29. До повышения цен чай с двумя пряниками стоил 1 рубль. Когда все цены выросли (на одинаковое число процентов), рубля стало хватать только на чай с одним пряником. Потом цены опять выросли, причём на столько же процентов, на сколько и в первый раз. Хватало ли после этого рубля хотя бы на чай? (*И. Акулич*)

30. Можно ли фигурками, изображёнными на рисунке, замостить плоскую фигуру, содержащую квадрат 8×8? Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать.



31. На острове 100 жителей. Они делятся на рыцарей, которые всегда говорят правду, лжецов, которые всегда врут, и хитрецов, которые чередуют правдивые и лживые высказывания (начать могут с любого). Всем был задан вопрос: «Правда ли, что рыцарей больше, чем хитрецов?» Ответов «Да» и «Нет» было поровну. Затем всем был задан вопрос: «Правда ли, что хитрецов больше, чем лжецов?» Опять ответов «Да» и «Нет» было поровну. Может ли на острове лжецов быть больше, чем рыцарей? (*Б. Френкин*)

32. Назовём разносторонностью треугольника отношение его наибольшей стороны к наименьшей, а разноугольностью – отношение его наибольшего угла к наименьшему. Петя уверен, что чем больше разносторонность треугольника, тем больше его разноугольность. Прав ли он? (*И. Акулич*)

33. По кругу лежат шесть монет, две из них фальшивые – они весят одинаково и легче настоящих. Также известно, что фальшивые монеты не лежат рядом. Как найти их за два взвешивания на чашечных весах без гирь? (*А. Шаповалов*)

34. На доске нарисован неравнобедренный треугольник. Имеется угольник той же формы, выпиленный из фанеры. Его можно прикладывать к доске (в том числе к уже начерченным прямым и точкам) и чертить линии по его краю. Как построить одну из высот нарисованного треугольника? (*А. Блинков, Ю. Блинков*)

35. Ровно в 9 часов из пункта А в пункт Б вышел пешеход, позднее – ещё один. Пешеходы идут с одинаковыми постоянными скоростями. Вслед за ними с постоянной скоростью едет велосипедист. Он обогнал первого пешехода через 14 минут после второго. Доехав до Б, велосипедист развернулся и с той же скоростью поехал обратно. Он встретил второго пешехода через 6 минут после первого. Во сколько вышел из А второй пешеход? (*А. Шаповалов*)

36. На координатной плоскости Oxy проведены две прямые, параллельные оси абсцисс и расположенные в одной полуплоскости от неё, содержащей положительную полуось ординат. Расстояние между этими прямыми равно 1. Пусть A – одна из точек пересечения параболы $y = x^2$ с той из проведённых прямых, которая ближе к оси абсцисс, B – точка пересечения второй прямой с осью ординат. Найдите величину угла OAB.

37. На доске был нарисован треугольник, от которого осталось только три точки: D и E – основания двух биссектрис и I – точка пересечения биссектрис. Восстановите этот треугольник, если известно, что угол DIE не равен 120°. (*С. Токарев*)

38. Решите в целых числах систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=t^2. \end{cases}$ (*В. Сендеров*)

39. Есть 63 одинаковые на вид монеты, одна из них фальшивая – она легче настоящих. Имеются чашечные весы без гирь, у которых правая чаша вымазана краской. Как за пять взвешиваний найти фальшивую монету, если монеты, побывавшие на правой чаше, нельзя после этого класть на левую? (*А. Шаповалов*)

Первый тур

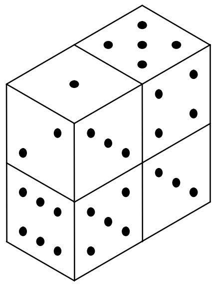
40. У мудрого ламы было два ленивых ученика. Как-то лама решил проучить их и предложил сыграть в старинную игру. Они сели за круглый стол, на который было высыпано 2009 спичек. Ученику, который сел по левую руку от ламы, разрешается за один ход брать одну, три или пять спичек. Ученик, который сидит по правую руку от ламы, берёт за один ход две, четыре или шесть спичек. Лама, в силу своей мудрости, всегда берёт ровно одну спичку. Первый ход делает лама, затем ходы делаются по очереди по часовой стрелке. Тот, кто не может сделать ход, пропускает его. Выигрывает тот, кто возьмёт последнюю спичку. Кто из них троих может выиграть, как бы ни играли соперники?

41. **а**) Купившему головку сыра массой 3,5 кг магазин предлагает призовую игру. Покупатель режет головку на три куска, а продавец выбирает из этих кусков один или несколько и раскладывает их на одну или на обе чаши весов. При неравновесии продавец обязан за счёт магазина добавить призовой кусок сыра, уравновешивающий чаши. Продавец старается сделать приз как можно меньше, а покупатель – как можно больше. Найдите массу призового куска при наилучших действиях сторон.

б) Та же задача, но головка сыра должна иметь массу 3 кг, а покупатель режет её на четыре куска. (*А. Шаповалов*)

42. На проводе сидят комары. При этом для каждого натурального числа от 1 до 13 есть два комара, расстояние между которыми (в метрах) равно этому числу. Какое наименьшее количество комаров может сидеть на проводе?

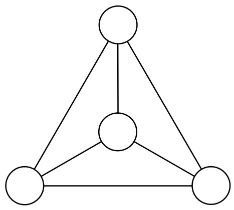
43. Наташа подсчитала, сколько команд пришло играть в «Пентагон». Потом прибежала команда «Тапочки», и Наташа записала на доске, во сколько раз увеличилось число команд. Потом прибежала команда «Ботинки», и Наташа снова записала на доске, во сколько раз увеличилось число команд. То же самое она сделала и после прихода команды «Сапоги», и после прихода команды «Валенки». Перемножив четыре записанных числа, она получила $\frac{3}{2}$. Сколько команд играло в «Пентагон»?



44. Незнайка купил в магазине четыре одинаковых игральных кубика. Развлекаясь, он решил прикладывать их друг к другу гранями с одинаковым числом очков. В результате на столе появилась конструкция, изображённая на рисунке. Знайка взглянул на конструкцию Незнайки и заявил, что тот опять что-то напутал. Прав ли Знайка? (*Р. Женодаров*)

45. **а**) После отбоя дети играли в крестики-нолики. Среди сыгранных партий пять были между девочками и 12 – между мальчиками. При этом каждый ребёнок сыграл с девочками на одну партию меньше, чем с мальчиками. Сколько детей играло в крестики-нолики?

б) Каждый депутат парламента Балбесии входит в одну из двух фракций: «сиреневых» или «бежевых». В ходе сессии случилось несколько драк, из которых 145 было между «сиреневыми» и 335 – между «бежевыми» (в каждой драке участвуют двое). При этом каждый депутат дрался с «сиреневыми» на один раз меньше, чем с «бежевыми». Какова численность парламента Балбесии? (*С. Токарев*)



46. **а**) Снежная королева велела Каю записать натуральные числа в кружочки схемы, изображённой на рисунке. Если суммы чисел в вершинах четырёх изображённых треугольников окажутся равны 10, 20, 30 и 40, он получит в награду ящик мороженого. Может ли Кай получить награду?

б) В вершинах треугольной пирамиды расставлены натуральные числа так, что суммы чисел на трёх боковых гранях равны 100, 110 и 130. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на основании? (*А. Кустарёв*)

47. Художник Большевич задумал написать картину «Разноцветный квадрат». Для этого он начертил таблицу 13×13 и стал раскрашивать каждую клетку в один из 13 цветов, соблюдая единственное правило: в одной строке и в одном столбце не должно быть двух клеток, раскрашенных одинаково. Придерживаясь этого правила, он уже раскрасил 13 клеток. Есть ли гарантия, что работу можно закончить, соблюдая правило?

48. Квадрат, составленный из единичных квадратиков, разрезали по линиям сетки на квадраты двух разных размеров. Могло ли квадратов с большей стороной оказаться столько же, сколько с меньшей? (*М. Ахмеджанова*)

49. За круглым столом сидело несколько рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда врут. Первый сказал: «Не считая меня, здесь лжецов на одного больше, чем рыцарей». Второй сказал: «Не считая меня, здесь лжецов на два больше, чем рыцарей» и так далее вплоть до последнего. Сколько человек могло сидеть за столом? (*А. Шаповалов*)

50. На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $AD = BD$ и $\angle CBD = 90°$. В каком отношении точка D делит основание AC?

51. Сумма трёх целых чисел равна нулю, а сумма их кубов является точным квадратом. Докажите, что произведение этих трёх чисел делится на 12. (*В. Сендеров*)

52. Можно ли все натуральные числа от 1 до 200 выписать по кругу так, чтобы для каждых двух соседних чисел хотя бы одно отличалось от другого на целое число процентов? (*И. Акулич*)

53. В треугольнике ABC проведены медиана AM и биссектриса AD. Известно, что медиана AN треугольника ADC совпадает с биссектрисой AE треугольника AMC. Докажите, что $AM = AB$. (*С. Токарев*)

54. Какое наибольшее число вершин клеток можно отметить на границе клетчатого квадрата 7×7 так, чтобы никакие три отмеченные точки не лежали в вершинах равнобедренного треугольника? (*А. Шаповалов*)

55. На доске написаны два выражения: $x + y + z$ и $x^2 + y^2 + z^2$. Два игрока по очереди заменяют x, y, z в выражениях натуральными числами (сначала первый игрок заменяет x, затем второй – y и, наконец, первый – z). Первый игрок хочет, чтобы в итоге оба выражения делились на 101, а второй пытается ему помешать. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*В. Сендеров*, *И. Богданов*)

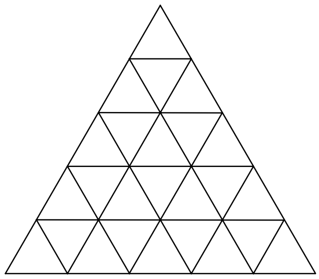
56. На клетчатой плоскости построена окружность с центром в узле сетки, радиус которой – натуральное число (сторона клетки равна 1). Может ли эта окружность проходить ровно через 1000 узлов?

57. Продолжения высот AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL проходит через точку пересечения высот треугольника A_1B_1C. (*Ю. Блинков*)

Второй тур

58. Петя вырезал из клетчатой тетради два одинаковых многоугольника по линиям сетки. Оказалось, что каждый из них можно разбить на двухклеточные прямоугольники. Петя разрезал один многоугольник по всем горизонтальным линиям сетки, а другой – по всем вертикальным и утверждает, что каждый из получившихся прямоугольников содержит нечётное число клеток. Может ли Петя быть прав? (*Б. Френкин*, *Т. Караваева*)

59. Из красных и синих палочек длины 1 сложили равносторонний треугольник, разбитый на меньшие треугольники (см. рисунок). Оказалось, что нет ни одного треугольника с тремя красными сторонами длины 1. Какое наибольшее число красных палочек могло быть использовано? (*М. Антонов*)



60. Из пункта А в пункт Б одновременно стартовали пешеход, велосипедист и мотоциклист, а позднее в разное время ещё и два автомобиля. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, причём скорости автомобилей одинаковы. Первый автомобиль сначала обогнал пешехода, через 2 минуты – велосипед, а ещё через 20 минут – мотоцикл. Второй автомобиль обогнал велосипед через 5 минут после пешехода. Через сколько минут после этого второй автомобиль обгонит мотоцикл? (*А. Шаповалов*)

61. В берендеевском лесу 55 детей собирали грибы. Всего они нашли десять белых грибов, 20 подосиновиков и 30 сыроежек. Выяснилось, что ровно у двух ребят в корзинке лежат и белые грибы, и подосиновики, у трёх – и белые грибы, и сыроежки, а у четырёх – и подосиновики, и сыроежки. Могло ли оказаться, что каждый ребёнок нашёл хотя бы один гриб?

62. На доске написаны три числа. За один ход разрешается отнять от суммы любых двух из них третье и записать результат вместо того числа, которое отнимали. Вначале были написаны числа 5, 10, 15. Через несколько ходов на доске оказались три числа, наименьшее из которых равно 100. Каким могло оказаться наибольшее число?

63. **а**) Пять монет лежат в ряд, две из них фальшивые – они весят одинаково и легче настоящих. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, сколько настоящих монет лежит между фальшивыми?

б) Та же задача, но неизвестно, легче или тяжелее фальшивые монеты настоящих. (*А. Шаповалов*)

64. Найдите наименьшее четырёхзначное число, сумма цифр которого равна 11, а произведение каждых трёх цифр одинаково. (*А. Хачатурян*)

65. По кругу стоят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут, – всего 100 человек. В первый раз каждого спросили: «Верно ли, что твой сосед справа – лжец?» Двое ответили «Да», остальные – «Нет». Во второй раз каждого спросили: «Верно ли, что следующий за твоим соседом слева – лжец?» И снова двое ответили «Да», остальные – «Нет». В третий раз спросили: «Верно ли, что стоящий напротив тебя – лжец?» Сколько человек на этот раз ответят «Да»? (*А. Шаповалов*)

66. В треугольнике ABC, в котором $\angle A = 40°$, а $\angle B = 60°$, проведена биссектриса AD. Окружность с центром в точке D, проходящая через точку C, пересекает AB в точках M и N (точка M лежит между A и N). Докажите, что CN – биссектриса треугольника BCM.

67. Двум разумным муравьям заранее объявили, что ночью их одновременно высадят в два узла доски 3×3 м, разбитой на квадраты 1×1 м. Муравьи ползают только по границам квадратов, их максимальная скорость равна 1 м/мин. Могут ли они договориться действовать так, чтобы гарантированно встретиться ранее чем через 6 минут после высадки? Муравьи различают узлы только по числу выходящих из них отрезков, в остальном узлы изначально для них равноправны и направления тоже. Муравей запоминает направления поворотов и направления отрезков, выходящих из узлов, где он бывал. Друг друга муравьи заметят, только оказавшись в одной точке. (*А. Шаповалов*)

68. Петя и Вася по очереди выкладывают на доску 2×27 не перекрывающиеся доминошки, начинает Петя. Каждая доминошка покрывает две соседние клетки. Петя выкладывает горизонтальные доминошки, а Вася – вертикальные. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*С. Токарев*)

69. Делитель натурального числа называется собственным, если он больше 1 и меньше этого числа. Найдите все натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель в 5 раз больше самого маленького.

70. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 2009, в записи которого все цифры одинаковы. (*С. Токарев*)

71. Лабиринт в плане имеет форму невыпуклого десятиугольника. Какое наибольшее количество человек может находиться в нём одновременно, не видя друг друга? Лабиринт внутри пуст, освещён, а стены непрозрачны. (*А. Шаповалов*)

72. В первой четверти ученики 7 и 8 классов берендеевской средней школы получали только тройки, четвёрки и пятёрки. В конце четверти оказалось, что средний балл девочек-семиклассниц по крайней мере на 1 больше, чем средний балл девочек-восьмиклассниц, а средний балл мальчиков-семиклассников по крайней мере на 1 больше, чем средний балл мальчиков-восьмиклассников. Докажите, что средний балл всех семиклассников не меньше среднего балла всех восьмиклассников.

73. Измерив длины сторон и высот некоторого треугольника, Таня получила шесть различных чисел и записала их на шести карточках. Перетасовав карточки, она показала их Боре. Всегда ли Боря сможет выбрать из них три карточки, на которых записаны длины сторон? (*Б. Френкин*)

74. Числа x, y, z натуральные, причём $x < y < z$. Известно, что в ряду x^2, y^2, z^2 разность между соседними числами одинакова. Найдите наименьшее возможное значение этой разности. (*В. Сендеров*)

75. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны. Найдите его углы, если известно, что три из них равны, а стороны четырёхугольника различны. (*А. Заславский*)

76. Саша взял три числа a, b, c и составил три дроби: $\frac{a}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}$, $\frac{c}{a+b}$. Оказалось, что эти дроби равны одному и тому же числу x. Какие значения может принимать x?

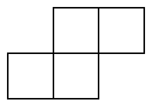
77. В парламенте некоторой страны десять партий. У каждого парламентария есть абсолютный рейтинг (положительное число), который не меняется. Также у каждого есть относительный рейтинг внутри своей партии, равный отношению его абсолютного рейтинга к сумме абсолютных рейтингов всех членов этой партии. Каждый день какой-нибудь один парламентарий переходит в другую партию так, чтобы его относительный рейтинг при этом увеличился (если такой парламентарий найдётся). Докажите, что эти переходы когда-нибудь прекратятся.

Третий тур

78. В однокруговом турнире матбоёв участвовали пять команд. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. По окончании турнира оказалось, что все команды набрали разное число очков. Назовём бой неправильным, если проигравшая команда заняла в итоге более высокое место. Какое наибольшее количество неправильных боёв могло произойти?

79. Девять одинаковых по внешнему виду конфет лежат в ячейках квадратной коробки 3×3. Известно, что три из них с мармеладом, а шесть – с помадкой. Витя не любит конфеты с помадкой. Может ли он за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти все конфеты с мармеладом, если известно, что они лежат в одном ряду (горизонтали, вертикали или диагонали) и каждая из них на 1 г тяжелее конфеты с помадкой?

80. Можно ли закрасить некоторые клетки шахматной доски так, чтобы фигурка, изображённая на рисунке, при любом расположении накрывала ровно одну закрашенную клетку? Фигурку разрешается поворачивать и переворачивать.



81. На доске через запятую написаны числа 1, 2, …, 100. Два игрока по очереди заменяют запятые на знаки сложения или умножения. Если после замены всех запятых значение полученного выражения будет чётным, то выигрывает первый игрок, иначе – второй. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

82. На шахматную доску, первоначально пустую, по одной выставляются ладьи. Каждый раз записывается число свободных клеток, побитых выставленной ладьёй. Какова наибольшая возможная сумма 64 записанных чисел? (*А. Шаповалов*)

83. Перед вами три человека: двое нормальных и один идиот. На вопрос, требующий ответа «Да» или «Нет», нормальные отвечают честно. Идиот в смысл вопроса не вникает, а отвечает «Да» или «Нет» наугад. Как за два таких вопроса определить, кто есть кто? Каждый вопрос задаётся одному человеку.

84. Петя вышел из точки A плоской равнины и прошёл 1 м на юг, 2 м на запад, 3 м на север, 4 м на восток, 5 м на юг, 6 м на запад, 7 м на север, 8 м на восток и так далее.

а) Когда пришла пора пройти прямолинейный отрезок длины 124 м, Петя прошёл лишь 62 м, устал и сел отдохнуть. На каком расстоянии от точки A это случилось?

б) Пройдя суммарно 5 км, Петя устал и сел отдохнуть. На каком расстоянии от точки A это случилось? (*С. Дориченко, Т. Голенищева-Кутузова*)

85. Треть книжной полки занимают книги толщиной 12 мм, другую треть – книги толщиной 15 мм и последнюю треть – книги толщиной 18 мм. Олег, читая по одной книге в день, прочитал их все меньше чем за два месяца. Сколько книг могло стоять на полке?

86. Из листа бумаги, одна сторона которого красная, а другая – синяя, Саша вырезал равнобедренный треугольник. Затем он перегнул его по биссектрисе угла при основании и склеил. Получился треугольник, состоящий из красного равнобедренного треугольника и синего равнобедренного треугольника. Докажите, что после перегиба у Саши получился равнобедренный треугольник.

87. Можно ли клетчатый квадрат **а**) 12×12; **б**) 20×20 разбить на двухклеточные прямоугольники так, чтобы каждый из них граничил по отрезку с нечётным числом других прямоугольников? (*А. Шаповалов*)

88. Лена заполнила клетчатый квадрат 100×100 крестиками и ноликами так, что ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали нет трёх одинаковых знаков подряд. Миша видит расстановку знаков только в центральном квадрате 4×4. Может ли он однозначно восстановить знаки в остальных клетках? (*А. Щепин*)

89. Хромые весы – это чашечные весы без гирь, которые ломаются навсегда, если покажут, что правая чаша тяжелее левой более чем на 1 г. В ряд лежат семь монет, две из них фальшивые – они обе тяжелее настоящих на 1 г. Известно, что фальшивые монеты лежат рядом или через одну. Как найти обе фальшивые монеты за два взвешивания на хромых весах? (*А. Шаповалов*)

90. В бутылке Клейна сидят три жучка и четыре паучка. Каждую секунду они размножаются, в результате чего рождается в 2 раза больше жучков, чем было паучков, и в 3 раза больше паучков, чем было жучков. Случится ли когда-нибудь такое, что количества жучков и паучков в бутылке сравняются? (*К. Скопцов*)

91. Решите в натуральных числах систему уравнений $\begin{cases} a+b=c, \\ a^3+b^3=c^2. \end{cases}$ (*Б. Френкин*)

92. На стороне *AC* треугольника *ABC* отмечены точки *M* и *N*. Известно, что каждый из отрезков *BM* и *BN* разбивает исходный треугольник на два равнобедренных. Найдите углы треугольника *ABC*. (*А. Блинков, Д. Шноль*)

93. На отрезке [0, 1] числовой оси отметили две точки *a* и *b*. Докажите, что на этом отрезке найдётся такая точка *x*, что будет выполнено неравенство $\frac{1}{|x-a|}+\frac{1}{|x-b|} \le 8$.

94. Даны три отрезка длины больше 1. За один ход разрешается один отрезок укоротить на 1, а каждый из двух других удлинить на 1. Всегда ли за несколько ходов можно получить три отрезка, из которых составляется треугольник? (*С. Дориченко*)

95. В треугольнике *ABC* угол *A* равен 60°, BB_1 и CC_1 – биссектрисы углов *B* и *C* соответственно. Пусть *O* – такая точка, что треугольник OB_1C_1 равносторонний, причём точки *O* и *A* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой B_1C_1. Докажите, что точка *O* лежит на стороне *BC*. (*Д. Прокопенко*)

96. Диагонали параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке *O*. На стороне *AB* отметили такую точку *M*, что $\angle AMO = \angle MAD$. Докажите, что отрезки *MC* и *MD* равны. (*М. Смуров*)

97. Дан клетчатый квадрат 9×9, на котором рисуются квадраты 2×2 со сторонами по линиям сетки. Какое наибольшее число квадратов (возможно, пересекающихся) можно нарисовать, чтобы никакие два из них не имели общего участка границы ненулевой длины? (*И. Акулич*)

Финал

98. В Стране дураков есть четыре поля чудес. Деньги, посеянные на первом поле, на следующее утро приносят двукратный урожай, на втором – четырёхкратный, на третьем – восьмикратный, а на четвёртом – шестнадцатикратный. У Буратино есть 22 золотые монеты. Ему известно, что с утра придут Карабас-Барабас, лиса Алиса и кот Базилио. Каждый из них выберет поле и соберёт с него весь урожай. Буратино же достанутся монеты только с оставшегося поля. Может ли он так распределить свои монеты по полям, чтобы в любом случае собрать больше монет, чем посеял?

99. В клетках таблицы 3×11 расположено 33 монеты. Они образуют 14 рядов: три горизонтальных и 11 вертикальных. Известно, что 13 рядов имеют одну и ту же массу, а четырнадцатый – другую. Как найти этот ряд за одно взвешивание на чашечных весах без гирь? (*А. Шаповалов*)

100. Каждая из 55 участниц женского собрания написала, у скольких из присутствующих возраст (число полных лет) не совпадает с её возрастом. К их ужасу оказалось, что каждая написала именно свой возраст в годах! Какое наибольшее количество различных чисел могло быть среди написанных возрастов? (*А. Шаповалов*)

101. На окружности расположено **а**) 19 точек, занумерованных числами 2, 3, …, 20; **б**) 49 точек, занумерованных нечётными числами 3, 5, …, 99 (произвольным образом). Если один номер делится на другой, соответствующие точки соединяются отрезком. Докажите, что найдутся отрезки, пересекающиеся во внутренних точках. (*А. Шаповалов*)

102. По прогнозу в Москве через год цены на квартиры упадут на 20% в рублях и на 40% в евро, а в Сочи цены в рублях упадут на 10%. На сколько процентов по этому прогнозу упадут цены в Сочи в евро? (*С. Маркелов*)

103. Поверхность кубика Рубика состоит из 54 клеток. Два игрока по очереди закрашивают их так, чтобы никакие две клетки с общей стороной не оказались одноцветными. Игра заканчивается, когда закрашены все клетки. Проигрывает тот, кто последним введёт в игру новый цвет. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

104. Саша вырезал из листа клетчатой бумаги два шестиугольника по линиям сетки и утверждает, что может сложить из них один и тот же шестиугольник двумя разными способами. Может ли Саша быть прав? (*А. Спивак*)

105. **а**) Четыре игральных кубика (не обязательно одинаковых, с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 на гранях) нанизали на спицу, проткнув ею центры противоположных граней кубиков так, что каждый может вращаться независимо от остальных. Спицу положили на стол и прочитали число, образованное цифрами на верхних гранях кубиков. Всегда ли можно повернуть кубики так, чтобы это число делилось на 11?

б) Та же задача для шести игральных кубиков. (*Г. Гальперин*)

106. Сумму двух трёхзначных чисел разделили на их разность и получили в частном чётное число. Какое наибольшее значение оно может принимать?

107. Брат-старшеклассник спросил у сестрёнки: «Сколько было таких дней, когда тебе было ровно в 3 раза меньше лет, чем мне?» – «Три дня», – ответила сестра. «А в 4 раза?» – «Четыре дня». – «А в 6 раз?» Тут сестрёнка задумалась. Она знала, что такие дни были, но сколько? Помогите ей ответить. (*А. Шаповалов*)

108. Серединный перпендикуляр к стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точке M. Определите вид треугольника ABC (остроугольный, прямоугольный, тупоугольный), если $AM < MC$. (*Д. Шноль*)

109. В колоде 52 карты. Назовём гибридом двух карт такую карту, у которой достоинство совпадает с достоинством первой карты, а масть – с мастью второй (например, гибридом дамы треф и туза пик является дама пик). Из колоды убрали одну карту. Всегда ли оставшиеся карты можно разбить на тройки, в каждой из которых одна из карт есть гибрид двух других?

110. Равносторонний треугольник со стороной 4 разбит на 16 клеток – равносторонних треугольников со стороной 1. У клеток всего 15 вершин, в каждую вершину положили по монете. Известно, что у всех клеток, кроме одной, суммарные массы монет в вершинах одинаковы, а у этой одной – меньше. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти «лёгкую» клетку? (*А. Шаповалов*)

111. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде разности натуральных чисел с чётными суммами цифр. (*С. Токарев*)

112. Докажите, что любой выпуклый четырёхугольник можно разрезать на четыре части, из которых складывается прямоугольник. (*С. Волчёнков*)

113. Десять ребят на лужайке играли в пейнтбол, стоя на месте. Сначала каждый выстрелил краской в ближайшего к себе. Затем каждый выстрелил в наиболее удалённого от себя. Если игроков, расположенных ближе всего к стреляющему или дальше всего от него, было несколько, то он стрелял в любого из них. Какое наибольшее число порций краски могло в итоге попасть в одного игрока? (*И. Акулич*)

114. Числа a, b, c различны и не равны нулю. Могут ли три прямые $y = ax + \frac{1}{b}$, $y = bx + \frac{1}{c}$ и $y = cx + \frac{1}{a}$ пересекаться в одной точке? (*А. Шаповалов*)

115. Имеется N одинаковых чашечных весов. В одних потерялась часть деталей, и теперь они могут показывать что угодно. На каждую чашу каждых весов можно поместить любое количество других весов. При каком наибольшем N за два взвешивания можно гарантированно найти неисправные весы? (*С. Токарев*)

116. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Найдите угол ABC, если $\angle BAC = 30°$, а $\angle BMC = 45°$. (*С. Токарев*)

117. На доске через запятую написаны числа **а**) 1, 2, …, 99; **б**) 1, 2, …, 2009. Два игрока по очереди заменяют запятые на знаки сложения или умножения. Если после замены всех запятых значение полученного выражения будет чётным, то выигрывает первый игрок, иначе – второй. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

118. Каждое натуральное число покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что или красные, или синие числа обладают следующим свойством: для каждых двух чисел этого цвета некоторое их общее кратное имеет тот же цвет.

119. В классе 32 человека. Каждый из них назвал два числа: количество его одноклассников с таким же ростом, но другим весом, и количество его одноклассников с таким же весом, но другим ростом. Среди названных чисел встретились все числа от 0 до 10. Докажите, что в этом классе можно выбрать двух человек с одинаковым ростом и одинаковым весом. (*К. Матвеев*, *А. Шаповалов*)

120. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^5 + y^3 = 2z, \\ y^5 + z^3 = 2x, \\ z^5 + x^3 = 2y. \end{cases}$ (*В. Сендеров*)

Источник: http://tursavin.ru