XIV турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2008 года

Личная олимпиада

1. Дано равенство $\text{М}\cdot\text{А}\cdot\text{Ш}\cdot\text{А}=\text{О}\cdot\text{Т}\cdot\text{Л}\cdot\text{И}\cdot\text{Ч}\cdot\text{Н}\cdot\text{И}\cdot\text{Ц}\cdot\text{А}$. Маша смогла заменить в нём одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные – разными так, что равенство стало верным. Значение какой буквы можно узнать по этим данным? (*А. Сгибнев*)

2. Треугольник разрезан на три треугольника так, что два из них остроугольные. Какой вид имеет третий треугольник: остроугольный, прямоугольный или тупоугольный? (*Б. Френкин*)

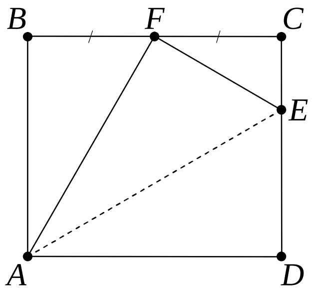
3. **а**) В групповом этапе чемпионата Европы по футболу участвовали четыре команды, каждые две сыграли по одному матчу. «Чистое» второе место заняла команда, набравшая 3 очка. Восстановите исходы всех матчей.

б) В однокруговом футбольном турнире участвовали n команд. При каких n «чистое» второе место могла занять команда, набравшая $n-1$ очко?

За победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. «Чистое» место означает, что больше нет команд, набравших столько же очков. (*А. Блинков*)

4. Найдите все такие числа, которые являются произведением трёх последовательных натуральных чисел и имеют при этом ровно два простых делителя. (*В. Сендеров*)

5. Бумажный прямоугольник $ABCD$ перегнули по отрезку AE (см. рисунок). Вершина D попала в точку F – середину стороны BC. Найдите CE, если $AE = 30$ см.



6. **а**) Есть 27 монет: девять копеек, девять «двушек» и девять «трояков». Известно, что среди монет есть одна фальшивая, которая легче настоящей. Настоящая копейка весит 1 г, «двушка» – 2 г, «трояк» – 3 г. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету?

б) В кассе купца Калашникова впервые за долгое время появились деньги – 27 монет: девять копеек, девять «двушек» и девять «пятаков». Известно, что одна из них фальшивая – она легче настоящей, а настоящие весят 1 г, 2 г и 5 г соответственно. Разгневанные работники требуют немедленной выдачи зарплаты, причём настоящими монетами. У приказчика имеются чашечные весы без гирь. Как только выясняется, что какие-либо монеты настоящие, они выплачиваются работникам и в дальнейших взвешиваниях не участвуют. Сможет ли приказчик наверняка определить фальшивую монету за три взвешивания? (*А. Шаповалов*)

7. Боря обнаружил, что для трёх чисел a, b, c выполняется равенство $ab+c=(a+c)(b+c)$, а при некоторой перестановке этих чисел равенство нарушается. Чему равно произведение abc? (*А. Заславский, Б. Френкин*)

8. Можно ли поверхность куба оклеить в один слой тремя одинаковыми пятиугольниками? (*С. Токарев*)

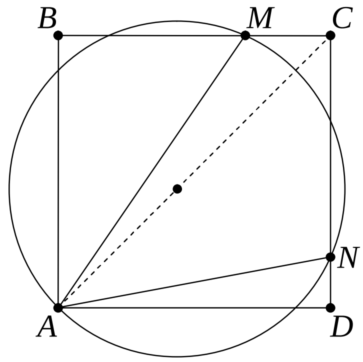
9. В кинотеатре 20 рядов по 25 мест в каждом, и все места заняты. Если зритель чихнёт во время сеанса, то он должен отдать каждому из своих соседей по рублю (соседями считаются сидящие слева, справа, спереди и сзади, у каждого зрителя может быть от двух до четырёх соседей). Вначале у всех было одинаковое количество денег. Дима чихнул и расплатился со своими соседями. Какое наименьшее число раз должны ещё чихнуть зрители, чтобы у всех снова стало поровну денег? (*Д. Калинин*)

10. Вася задумал три натуральных числа. Для каждой пары задуманных чисел он нашёл разность между их произведением и суммой. Оказалось, что одна из этих разностей отрицательна, другая положительна. Каков знак третьей разности? (*Б. Френкин*)

11. Назовём диаметром треугольника длину его наибольшей стороны. Докажите, что любой треугольник можно разбить на два треугольника одинакового диаметра. (*А. Шаповалов*)

12. Докажите неравенство $x^2 + y^2 + \frac{x^2y^2}{(x+y)^2} \geq \frac{9}{4}xy$. (*В. Сендеров*)

13. Окружность с центром на диагонали AC квадрата $ABCD$ проходит через точку A и пересекает стороны BC и CD в точках M и N соответственно (см. рисунок). Найдите угол MAN. (*В. Произволов*)



14. Два игрока по очереди ломают палку: первый – на две части (возможно, неравные), второй – одну из получившихся частей на две, первый – одну из трёх частей на две и так далее. Выигрывает тот, кто сможет после своего хода выбрать из всех имеющихся частей четыре палки, длины которых образуют арифметическую прогрессию. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

15. Вася выписал на доске всевозможные попарные суммы различных делителей натурального числа $n > 1$. Оказалось, что среди выписанных чисел поровну чётных и нечётных. При каких n такое возможно? (*К. Матвеев*)

16. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. Рассматриваются такие прямоугольные треугольники ADC с прямым углом D, что точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC. Пусть прямая BD пересекает биссектрису угла ACD в точке E. Найдите геометрическое место точек E. (*Ю. Блинков*)

Командная олимпиада и нулевой тур

17. От группового этапа одного из чемпионатов мира по футболу осталась таблица (В – число побед команды, Н – число ничьих, П – число поражений, М – число забитых и пропущенных мячей). Известно, что каждые две команды сыграли по одному матчу. Определите результаты всех матчей. (*С. Токарев*)

	В	Н	П	М
Италия	1	2	0	1 : 0
Уругвай	1	1	1	2 : 1
Швеция	1	1	1	2 : 2
Израиль	0	2	1	1 : 3

18. Маша дружит с половиной друзей Даши, а Даша дружит с половиной друзей Маши. Может ли у Маши быть больше друзей, чем у Даши? (*Е. Новодворская*)

19. Можно ли в вершинах куба расставить все натуральные числа от 1 до 8 так, чтобы шесть сумм на гранях оказались шестью последовательными натуральными числами? (*А. Шаповалов*)

20. Можно ли представить число 2008 в виде суммы шести натуральных слагаемых так, чтобы все цифры в записи этих слагаемых были различны? (*А. Шаповалов*)

21. Дано пять двузначных составных чисел. Может ли оказаться, что каждые два из этих чисел взаимно просты?

22. Дорожки парка идут по границам двух квадратных газонов с общей стороной. По дорожкам гуляют с постоянными скоростями Холмс и Ватсон, каждый обходит свой газон против часовой стрелки. Скорость Холмса на 20% больше скорости Ватсона. Время от времени они встречаются на общей дорожке. Во второй раз они встретились через 10 минут после первого, а в третий – через 10 минут после второго. Через какое время они встретятся в четвёртый раз? (*А. Шаповалов*)

23. На доске 100×100 расставлено 100 не бьющих друг друга ферзей. Докажите, что в каждом угловом квадрате 50×50 есть хотя бы один ферзь. (*А. Грибалко*)

24. На поверхности кубика Рубика отмечено несколько точек так, что в каждой из 54 клеток, включая её границу, отмечена ровно одна точка. Какое наименьшее число точек может быть отмечено? (*А. Шаповалов*)

25. В кастрюлю, наполненную холодной водой меньше чем наполовину, стали лить горячую воду. Когда кастрюля заполнилась ровно наполовину, температура воды в ней оказалась на 20°C выше первоначальной, а когда кастрюля наполнилась доверху, – на 50°C выше первоначальной. Найдите разность температур горячей и холодной воды. (*С. Токарев*)

26. Бесконечная клетчатая плоскость раскрашена в белый и чёрный цвета (каждая клетка – одним цветом) так, что каждая белая клетка граничит по стороне с двумя чёрными, а каждая чёрная – с k белыми. При каких k такое возможно?

27. Решите в натуральных числах уравнение $\text{НОК}(x, y) = x + y + 40$. (*А. Шаповалов*)

28. Луч радара вращается с постоянной скоростью и засекает цель на расстоянии 25 км и меньше. Первый раз цель была замечена на расстоянии 20 км, азимут 150°, второй раз – на расстоянии 10 км, азимут 90°. Определите расстояние и азимут при следующем обнаружении цели, если известно, что она движется прямолинейно и с постоянной скоростью. Азимут – это угол, отсчитываемый от направления на север против часовой стрелки.

29. На шахматную доску, первоначально пустую, по одной выставляются ладьи. В момент выставления ладья должна побить чётное число свободных клеток (возможно, ни одной). Какое наибольшее количество ладей может быть выставлено? (*А. Шаповалов*)

30. Сумма кубов четырёх последовательных целых чисел оказалась кубом целого числа (например, $11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3$). Докажите, что произведение двух средних чисел делится на 4. (*В. Сендеров*)

31. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$. Докажите, что **а**) $a^{2^n} + b^{2^n} + c^{2^n}$ делится на $a + b + c$ для любого натурального n; **б**) $a^5 + b^5 + c^5$ делится на $a + b + c$. (*В. Сендеров*)

32. Найдите все n, для которых любой треугольник может быть разрезан на n равнобедренных треугольников. (*А. Шаповалов*)

33. Для каких x существуют такие действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2008}$, что
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2008} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{2008}} = x?$$
(*В. Сендеров*)

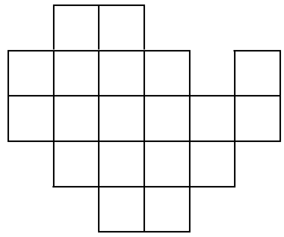
34. В треугольнике ABC основания биссектрис являются вершинами равностороннего треугольника. Докажите, что треугольник ABC тоже равносторонний.

35. За круглым столом сидят 2000 рыцарей, которые представляют 999 рыцарских орденов, причём каждый орден кем-нибудь представлен. Среди каждых 1000 сидящих подряд рыцарей есть представители не более чем 500 орденов. Сколько рыцарей первого ордена может присутствовать за столом? (*К. Матвеев*)

36. Действительные числа a, b, c таковы, что число $\dfrac{bc}{a^2+2bc} + \dfrac{ca}{b^2+2ca} + \dfrac{ab}{c^2+2ab}$ целое. Докажите, что число $\dfrac{a^2}{a^2+2bc} + \dfrac{b^2}{b^2+2ca} + \dfrac{c^2}{c^2+2ab}$ тоже целое. (*В. Сендеров*)

37. В стране несколько городов, каждые два из которых соединены либо железной дорогой, либо авиалинией (выполняется ровно одна из этих возможностей). Докажите, что можно назначить один из городов столицей и выбрать вид транспорта (железнодорожный или воздушный) так, чтобы, используя его, была возможность добраться из каждого города до столицы, сделав не более одной пересадки. (*К. Матвеев*)

Первый тур



38. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может вырезать из фигуры, изображённой на рисунке, квадрат 2×2, а оставшуюся часть разрезать на три равные части. Могут ли слова барона быть правдой? (*Д. Калинин*)

39. Можно ли отметить несколько клеток на поверхности кубика Рубика так, чтобы на каждом кольце из 12 клеток, опоясывающем кубик, было отмечено ровно пять клеток? (*А. Грибалко*)

40. Книга сшита из 12 одинаковых тетрадей, каждая из которых состоит из двойных листов. Все страницы книги пронумерованы. Сумма номеров четырёх страниц одного двойного листа пятой тетради равна 578. Сколько страниц в книге? (*Н. Авилов*)

41. На некотором острове мужчины всегда говорят правду, а женщины всегда врут. Ровно половину выпускников школы острова пригласили на выпускной бал. Когда опросили всех выпускников, получали ли они приглашения, ровно половина ответила «Да», остальные – «Нет». Какая часть выпускниц получила приглашения на бал?

42. Незнайка сказал, что если сложить все двузначные числа, получающиеся вычёркиванием пяти цифр из его семизначного телефонного номера, то в сумме получится 2008. Знайка утверждает, что Незнайка ошибся в вычислениях. Прав ли Знайка, если известно, что в номере Незнайки **а**) нет нулей; **б**) могут быть нули?

43. В групповом турнире Кубка УЕФА участвуют пять команд, каждые две должны сыграть по одному матчу. За победу начисляется 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. В следующий этап выходят три команды, набравшие наибольшее число очков (при равенстве очков учитываются дополнительные показатели). Какое наименьшее число очков должна набрать команда, чтобы обеспечить себе выход в следующий этап, независимо от дополнительных показателей? (*А. Блинков*)

44. Какое наибольшее количество пятиклеточных крестов можно вырезать из шахматной доски, если разрезы разрешено делать только по границам клеток? (*А. Грибалко*)

45. Может ли натуральное число, у которого все цифры, кроме одной, нечётные, делиться на 2008? (*С. Токарев*)

46. Из доски 11×11 вырезали 24 двухклеточные доминошки. Всегда ли из оставшейся части можно по границам клеток вырезать прямоугольник 1×3?

47. Малыш и Карлсон по очереди берут конфеты из одного пакета. Малыш берёт одну конфету, Карлсон – две, затем Малыш берёт три конфеты, Карлсон – четыре и так далее. Когда количество оставшихся в пакете конфет станет меньше необходимого, тот, чья очередь наступила, берёт все оставшиеся конфеты. Сколько конфет было в пакете первоначально, если у Малыша в итоге оказалась 101 конфета? (*А. Шаповалов*)

48. В однокруговом волейбольном турнире участвовали 14 команд. Назовём интересной команду, выигравшую нечётное число матчей, а особенной – команду, выигравшую нечётное число матчей у интересных. Докажите, что количество особенных команд чётно. (*С. Токарев*)

49. Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что $\angle A = 85°$, $\angle B = 115°$, $AD = BC$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке M. Найдите угол MAB. (*А. Шаповалов*)

50. Таблица содержит n строк и $2n$ столбцов. Для каждого i от 1 до n в i-й строке закрашена $2i - 1$ первая клетка. Два игрока по очереди ставят ладьи на закрашенные клетки так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник, **а**) при $n = 20$; **б**) при любом натуральном n? (*К. Матвеев*)

51. Дано девять чисел $a_1, a_2, \ldots, a_9$. Известно, что среди их попарных сумм как минимум 29 целых. Докажите, что все числа $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_9$ целые. (*А. Шаповалов*)

52. На плоскости расположены два прямоугольника P и Q, пересечением которых является равносторонний восьмиугольник. Докажите, что **а**) P и Q – квадраты; **б**) P и Q – квадраты с общим центром. (*К. Матвеев*)

53. Существует ли такое натуральное $n > 1$, что **а**) $n!$ делится на n^7; **б**) $(n - 1)!$ делится на n^{2008}? (*В. Сендеров*)

54. Числа a и b положительные, а числа m и n натуральные, причём $a^m - b^m = a^n - b^n$. Верно ли, что либо $a = b$, либо $m = n$? (*В. Сендеров*)

55. Сумма целых ненулевых чисел a, b, c равна нулю. Докажите неравенство $ab + bc + ca < -2$. (*В. Сендеров*)

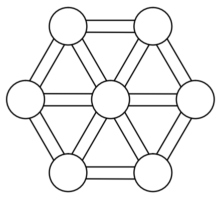
56. Для неотрицательных чисел x, y, z и натурального n докажите неравенство $(x + y - z)^n + (y + z - x)^n + (z + x - y)^n \geq x^n + y^n + z^n$. (*В. Произволов, В. Сендеров*)

57. В треугольнике ABC высота AH и медиана BM равны и пересекаются в точке D. Прямая DC является биссектрисой угла HDM. Найдите углы треугольника ABC.

58. На клетчатой бумаге нарисован треугольник с вершинами в узлах сетки. Может ли точка пересечения биссектрис треугольника тоже оказаться в узле сетки? (*А. Шаповалов, К. Матвеев*)

59. Докажите, что существует бесконечно много точных квадратов, не оканчивающихся нулём, в которых каждая отличная от нуля цифра нечётна. (*В. Сендеров*)

Второй тур



60. В системе коридоров (см. рисунок) расстояние между каждыми двумя соседними развилками одно и то же. По коридорам бегает мышка, максимальная скорость которой равна 7 м/с. За мышкой согласованно охотятся две кошки, способные развивать скорость до v м/с. Все животные в каждый момент знают расположение друг друга. При каком наименьшем значении v кошки могут (независимо от начальных положений) гарантированно поймать мышку? (*С. Токарев*)

61. За круглым столом сидит 31 человек. Некоторые из них – рыцари, которые всегда говорят правду, остальные – лжецы, которые всегда врут, причём есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Каждого спросили: «Сколько рыцарей среди твоих соседей?» Все дали одинаковые ответы.

а) Какое наибольшее число рыцарей может сидеть за столом?

б) Сколько рыцарей может сидеть за столом? (*Д. Калинин*)

62. Петя утверждает, что знает некое хитрое трёхзначное число. Шесть различных трёхзначных чисел получены перестановками цифр этого числа и записаны в ряд. При этом первое число делится на 2, второе – на 3, третье – на 4, четвёртое – на 5, пятое – на 6, шестое – на 7. Может ли Петя быть прав? (*Д. Калинин*)

63. Каждое ребро куба покрасили в какой-то цвет. Известно, что для каждых двух цветов найдётся вершина, в которой сходятся рёбра этих цветов. Какое наибольшее количество цветов могло быть использовано? (*Д. Калинин*)

64. На выходные в лес за грибами выехали 15 одноклассников. Оказалось, что каждый из них нашёл в воскресенье больше грибов, чем в субботу. Наибольшее число грибов, найденных в один день одним школьником, оказалось равно 20. Семеро одноклассников в сумме за два дня собрали одинаковое количество грибов. Докажите, что какие-то два одноклассника по крайней мере в один из двух дней сбора нашли одинаковое количество грибов.

65. Паша записывает в таблицу 4×4 все натуральные числа от 1 до 16. Надя выбирает две клетки с общей стороной, и Паша выдаёт ей число конфет, равное сумме в выбранных клетках. Надя хочет получить как можно больше конфет. Каким наименьшим числом конфет может обойтись Паша? (*Д. Калинин*)

66. Круг разбит на 25 секторов, пронумерованных в произвольном порядке числами от 1 до 25. В одном из секторов сидит кузнечик. Он прыгает по кругу, каждым своим прыжком перемещаясь по часовой стрелке на количество секторов, равное номеру текущего сектора. Докажите, что в некотором секторе кузнечик не побывает никогда. (*А. Грибалко*)

67. Какое наименьшее число клеток шахматной доски можно отметить так, чтобы в каждом прямоугольнике из девяти или более клеток хотя бы одна клетка была отмечена? (*А. Шаповалов*)

68. По углам прямоугольного бассейна 10×25 м стояли четыре спортсмена. Тренер подошёл к краю бассейна и подозвал их к себе. Все подошли кратчайшими путями по кромке бассейна. Известно, что трое спортсменов прошли в сумме 50 метров. Сколько прошёл четвёртый? (*А. Шаповалов*)

69. На доске написаны числа 1, 2, …, 10. За один ход разрешается увеличить любое число на доске на сумму цифр любого из написанных (в том числе на сумму цифр его самого). Можно ли добиться, чтобы все числа стали равны 9999?

70. Прямоугольный параллелепипед $1 \times 1 \times 2$ перекатывают (через рёбра) по доске 16×16. Можно ли прокатить его так, чтобы каждую клетку доски параллелепипед покрыл ровно один раз? (*А. Шаповалов*)

71. В трапеции $ABCD$ основание BC видно из середины AD под прямым углом. Докажите, что $AB + CD \geq BC$. (*Д. Калинин*)

72. Докажите, что произведение целых чисел a, b, c, связанных равенством $a^2 + b^2 = 2c^2 - 2$, делится на 144. (*С. Токарев*)

73. Можно ли представить число $\frac{1}{2008}$ в виде суммы нескольких чисел вида **а**) $\pm\frac{2^n}{n}$; **б**) $\pm\frac{5^n}{n}$, где n натуральное? (*В. Сендеров*)

74. С помощью равнобедренных ножниц можно от многоугольника отсечь прямым разрезом равнобедренный треугольник. Барон Мюнхгаузен утверждает, что за несколько таких отсечений может сделать квадрат из любого треугольника. Могут ли слова барона быть правдой? (*А. Шаповалов*)

75. В ряд стоят $n > 2$ слоников по возрастанию массы. Контролёр хочет проверить, является ли разность масс каждых двух соседних слоников одной и той же. При каких n он сможет это сделать с помощью чашечных весов без гирь? (*А. Шаповалов*)

76. В трапеции $ABCD$, диагонали которой пересекаются в точке O, известны основание AD, а также углы A, D и AOD. С помощью циркуля и линейки постройте эту трапецию. (*Д. Калинин*)

77. Какое наибольшее количество нулей может быть среди **а**) последних четырёх цифр числа 2^n для натурального $n > 10$; **б**) последних шести цифр числа 2^n для натурального $n > 100$? (*В. Сендеров*)

78. На доске 100×100 расставлены короли двух цветов так, что белых не меньше, чем чёрных, и белые короли не бьют чёрных. Каково наибольшее возможное число чёрных королей? (*О. Крижановский*, *А. Шаповалов*)

79. В королевстве 1001 город и изначально нет дорог. Два министра делают ходы по очереди. За один ход каждый из них соединяет дорогой два ещё не соединённых города. Проигрывает тот, после чьего хода впервые образуется замкнутый маршрут, состоящий из нечётного количества дорог. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Д. Вельтищев, М. Вельтищев*)

80. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через произвольную точку X первой окружности, отличную от A, проведена прямая XA, которая повторно пересекает вторую окружность в точке Y. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников BXY. (*Ю. Блинков*)

81. Докажите, что при рациональных $0 < a, b < 1$ выполняется неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^b + \left(\frac{b}{a}\right)^a.$$

(*Н. Агаханов*, *В. Сендеров*)

82. Дан выпуклый многоугольник. Пусть a – количество способов разбить его непересекающимися диагоналями на чётное число многоугольников, а b – на нечётное. Докажите, что $|a - b| = 1$. (*А. Клячко*)

Третий тур

83. Целое число a можно заменить на одно из чисел $999 - a$, $1000 - a$ или $1001 - a$. За какое наименьшее количество замен **а**) из числа 2008 можно получить число 14; **б**) из числа 14 можно получить число 2008? (*Л. Смирнова*)

84. На доске написаны четыре различных натуральных числа. Алёша разделил одно из них на другое, в частном получил третье, а в остатке – четвёртое. Боря также разделил одно из этих чисел на другое, в частном получил какое-то из оставшихся, а в остатке – другое оставшееся. Докажите, что в обоих случаях остаток получился одинаковый. (*Б. Френкин*)

85. «В моём классе много детей: 13 девочек и 20 мальчиков. Но я с ними легко держу связь, – рассказывал классный руководитель. – У каждой девочки есть телефоны некоторых мальчиков. А каждая группа из семи девочек в состоянии обзвонить всех мальчиков». На это учитель математики ответил: «Не знаю, кому чьи телефоны известны, но достаточно выбрать четырёх девочек, и они обзвонят всех ваших мальчиков». Прав ли учитель математики? (*Д. Калинин*)

86. **а**) Какое наибольшее количество двузначных чисел можно выписать так, чтобы сумма никаких двух из них не была кратна 7?

б) Какое наименьшее количество чисел необходимо вычеркнуть из первой сотни натуральных чисел так, чтобы сумма никаких двух из оставшихся не была кратна 7? (*А. Спивак*)

87. В некотором королевстве все города имеют разное число жителей. На самолёте можно перелететь из города в некоторые (возможно, не все) города с меньшим населением. Если поставить перед собой цель совершить путешествие по некоторым городам, перелетая из одного в другой, то можно посетить не более n городов. Докажите, что король может поделить города между своими n сыновьями так, что любой перелёт будет из города одного сына в город другого сына, если **а**) $n = 6$; **б**) n – любое натуральное число. (*Л. Смирнова*)

88. На листе бумаги нарисован **а**) прямоугольник; **б**) пятиугольник, состоящий из квадрата и равностороннего треугольника с общей стороной. Разрешается несколько раз перегнуть лист бумаги по прямой линии и сделать ножницами один прямолинейный разрез. Можно ли сделать это так, чтобы вырезать нарисованный многоугольник, не сделав на листе бумаги никаких лишних надрезов?

89. Имеется десять одинаковых на вид деталей, семь из которых весят по 100 г, две – по 99 г и одна – 98 г. Требуется найти хотя бы одну 100-граммовую деталь на чашечных весах без гирь.

а) Как это сделать за два взвешивания?

б) За какое наименьшее количество взвешиваний можно это сделать?

(*О. Крижановский*)

90. **а**) На шахматной доске, первоначально пустой, Ося и Киса ходят по очереди. Своим ходом Ося отмечает от одной до восьми клеток крестиками. Киса своим ходом стирает несколько крестиков, идущих подряд по горизонтали или вертикали. Может ли Ося поставить на доску 57 крестиков?

б) В условиях пункта а) Ося выиграет, если в какой-то момент крестиками будет отмечено n клеток. При каком наибольшем n Киса не сможет ему помешать?

в) Та же задача, но Ося отмечает от одной до девяти клеток крестиками, а Киса выбирает любой составленный из отмеченных клеток прямоугольник и стирает в нём все крестики. (*А. Шаповалов*)

91. Красный квадрат покрыт 100 белыми квадратами. При этом все квадраты (включая красный) одинаковы и стороны каждого белого квадрата параллельны сторонам красного. Всегда ли можно удалить один из белых квадратов так, что оставшиеся белые квадраты всё ещё будут покрывать целиком красный квадрат?

92. Два равных прямоугольника $ABCD$ и $AEFG$ ($AB = AE$, $AD = AG$) расположены так, что точка G лежит на отрезке BC. Отрезки CD и FG пересекаются в точке N. Докажите, что отрезки BN и EN равны. (*Д. Калинин*)

93. **а**) Натуральное число n равно произведению нескольких первых простых чисел. Докажите, что любое натуральное число, меньшее n, может быть представлено как сумма нескольких различных натуральных делителей n.

б) Докажите то же утверждение для такого $n > 1$, что если оно делится на некоторое простое число, то оно делится и на все меньшие простые числа. (*К. Матвеев*)

94. Решите уравнение $[x]-\left[\frac{x}{2}\right]-\left[\frac{x}{4}\right]-\left[\frac{x}{8}\right]=\{x\}+\left\{\frac{x}{2}\right\}+\left\{\frac{x}{4}\right\}+\left\{\frac{x}{8}\right\}$.

95. Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_{n+1} = [a_n]\{a_n\}$. Докажите, что эта последовательность, начиная с некоторого места, периодична.

96. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по центру описанной окружности, центру вписанной окружности и центру одной из вневписанных окружностей.

97. Известно, что некоторое число равно произведению n натуральных сомножителей, больших 1. При каком наименьшем n можно гарантировать, что это число представимо в виде произведения 2008 различных натуральных сомножителей, больших 1?

(*В. Сендеров*)

98. Многоугольник (не обязательно выпуклый) удалось разрезать **а**) на 20; **б**) на 2008 меньших равных многоугольников, подобных исходному. Обязательно ли исходный многоугольник – параллелограмм? (*А. Шаповалов*)

99. На каждой клетке шахматной доски находится указатель, направленный вверх, вправо, вниз или влево. В начальной позиции один из них направлен вниз, остальные – вверх. За один ход разрешается одновременно повернуть на 90° по часовой стрелке два указателя, находящиеся на соседних по стороне клетках. Можно ли за несколько ходов добиться, чтобы все указатели были направлены в одну сторону? (*А. Грибалко*)

100. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Прямая, проходящая через точку O и середину стороны BC, пересекает сторону AD в точке E. Докажите, что отношение площадей треугольников ABO и DCO равно отношению длин отрезков AE и DE. (*М. Волчкевич*)

Финал

101. Карточка для игры в «Берендеево лото» – квадрат, разбитый на четыре одинаковых квадратика. Игрок должен занумеровать эти квадратики числами 1, 2, 3, 4, после чего организаторы игры предъявят карточку-эталон с занумерованными квадратиками. Карточка считается выигравшей, если хотя бы в двух её соседних квадратиках стоят те же цифры, что и в карточке-эталоне. Какое наименьшее количество карточек можно заполнить так, чтобы гарантировать наличие среди них хотя бы одной выигравшей? (*С. Токарев*)

102. Назовём кирпичом прямоугольный параллелепипед, у которого длина, ширина и высота различны. Можно ли поверхность какого-нибудь кирпича оклеить в один слой пятью бумажными квадратами? Квадраты можно перегибать через рёбра кирпича, их размеры не обязательно одинаковы. (*А. Шаповалов*)

103. Какое наименьшее число слонов можно расставить **а**) на шахматной доске; **б**) на доске $2n \times 2n$ так, чтобы каждая свободная клетка была побита ровно один раз? (*А. Шаповалов*)

104. У Васи и Пети были одинаковые бумажные прямоугольники. Каждый мальчик разрезал свой прямоугольник на три прямоугольника периметра 14. При этом никакой из Васиных прямоугольников не совпал по размерам ни с каким из Петиных. Найдите периметры исходных прямоугольников. (*С. Токарев*)

105. Часы судиславского автовокзала отстают. По хронометру установлено, что их минутная стрелка догоняет часовую стрелку каждые 66 минут. На сколько минут в сутки отстают эти часы?

106. Есть бесконечный ряд шариков трёх видов: на одних написано «1», на других – «2», на остальных – «3». Никакие два шарика одного вида не находятся рядом. Всегда ли можно найти несколько идущих подряд шариков, сумма чисел на которых равна **а**) 12; **б**) 2008? (*А. Банникова*)

107. Волейбольный турнир проводился по олимпийской системе. Вначале все имеющиеся команды разбились на пары и прошёл первый тур. Проигравшие команды выбыли из турнира. Оставшиеся команды разбились на пары, а если это было невозможно, то к ним добавлялась ещё вновь сформированная команда. После второго тура проигравшие команды выбыли и так далее. Когда в очередном туре был сыгран только один матч, его победитель был объявлен победителем турнира. Могло ли в таком турнире участвовать ровно 2008 команд? (*Д. Калинин*)

108. Решите ребус $\frac{\text{РЕШИ}}{13} = \frac{\text{ЭТО}}{9} = \frac{\text{САМ}}{6}$. (*О. Крижановский*)

109. Есть набор из десяти карточек с числами 1, 2, …, 10. Двум игрокам выдали по карточке с числами a и b из этого набора. Каждый знает только своё число. Игроки должны по очереди называть натуральные числа так, чтобы каждое было больше предыдущего и заведомо (для называющего) было делителем НОК(a, b). Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Есть ли такая карточка, получив которую, первый игрок может гарантированно выиграть? (*А. Шаповалов*)

110. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ разбит диагональю на остроугольный треугольник ABC и треугольник CDA, в котором $CD > DA$. Оказалось, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на биссектрисе угла CDA. Вычислите $\angle DAB - \angle ABC + \angle BCD$. (*Д. Калинин*)

111. Разложите выражение **а**) $1 + x^4 + (1 + x)^4$; **б**) $x^4 + y^4 + (x + y)^4$ на множители меньшей степени. (*В. Произволов*, *В. Сендеров*)

112. Натуральное число n можно заменить на одно из следующих шести чисел: $3n$, $3n + 1$, $3n + 2$, $\frac{n}{3}$, $\frac{n+1}{3}$, $\frac{n+2}{3}$ при условии, что получающееся число целое. Докажите, что с помощью таких операций из любого натурального числа можно получить любое другое. (*Л. Смирнова*)

113. Существует ли такое простое p, что число p^{18} десятизначно и все цифры в нём различны?

114. На листе клетчатой бумаги нарисуйте окружность наибольшего радиуса, пересекающую линии сетки только в узлах.

115. Докажите, что любой треугольник можно с помощью циркуля и линейки разбить на четыре меньших треугольника так, чтобы четыре точки пересечения медиан этих треугольников лежали на одной окружности. (*А. Шаповалов*)

116. Корень n-й степени из n-значного числа, где $n > 1$, равен сумме цифр этого числа. Найдите все значения, которые может принимать этот корень. (*С. Шестаков*)

117. В выпуклом многоугольнике сумма тупых углов равна 2008°. Сколько сторон у этого многоугольника? (*А. Шаповалов*)

118. На окружности расставлено несколько действительных чисел. Рассмотрим группы из одного или нескольких идущих подряд чисел с неотрицательной суммой и назовём число на окружности хорошим, если оно является первым по часовой стрелке хотя бы в одной из этих групп. Докажите, что сумма хороших чисел неотрицательна.

119. Существуют ли такие ненулевые целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2008}$, что $x_1x_2\ldots x_{2008} = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)\ldots(x_{2008} + x_1)$? (*С. Токарев*, *В. Сендеров*)

120. В клетчатом квадрате $n \times n$ стёрли все клетки выше главной диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний. В каждую клетку оставшейся «лесенки» записывают 0 или 1, при этом если в какой-то клетке написана единица, то и в соседних с ней по стороне слева и сверху также должны стоять единицы. Сколькими способами это можно сделать? (*Е. Горская*)

121. Докажите, что при натуральных $n > 1$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{2} > \frac{2n}{2n-1}$. (*В. Сендеров*)

122. К описанной окружности остроугольного треугольника ABC проведены касательные в точках A и B, пересекающиеся в точке K. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – высоты треугольника ABC, H – точка их пересечения, M – середина стороны AC. Прямые MH и A_1B_1 пересекаются в точке L. Докажите, что точки K, L, C_1 лежат на одной прямой. (*Ю. Блинков*)

Источник: http://tursavin.ru