XIII турнир математических боёв имени А.П. Савина

Базы отдыха «Берендеевы поляны» и «Алые паруса»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2007 года

Личная олимпиада

1. Профессор Мумбум-Плюмбум мечтает найти десять различных натуральных чисел, наибольший общий делитель которых совпадает с их средним арифметическим. Удастся ли ему это сделать? (*А. Жуков*)

2. На острове проживают аборигены, каждый из которых либо всегда говорит правду, либо всегда врёт. Как-то встретились три аборигена Ах, Ох и Ух. Один из них сказал: «Ах и Ох – оба лжецы», другой сказал: «Ах и Ух – оба лжецы» (но кто именно что сказал, неизвестно). Сколько всего лжецов среди этих трёх аборигенов? (*Е. Барабанов*)

3. В водоёме плавали 2007 акул и 2007 щук. Акула может съесть щуку, если та до этого съела чётное число акул. Щука может съесть акулу, если та до этого съела нечётное число щук. Каждая съеденная рыба мгновенно переваривается. Акулы не едят акул, а щуки – щук. Могло ли так случиться, что в водоёме осталась только одна рыба, и если да, то какая? (*И. Богданов*)

4. На столе лежат 2007 кучек по одному ореху в каждой. Два игрока ходят по очереди. За один ход нужно объединить любые две кучки с равным количеством орехов в одну. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

5. Назовём натуральное число своим, если его можно представить в виде среднего арифметического нескольких квадратов натуральных чисел (например, $2007 = \dfrac{3^2 + 7^2 + 7^2 + 89^2}{4}$). Верно ли, что все натуральные числа свои? (*А. Романенко*)

6. Нарисуйте семь правильных шестиугольников так, чтобы каждые два из них имели ровно две общие вершины. (*С. Токарев*)

7. Даны три палочки различной длины. Разрешается разрезать любые из них на несколько частей. Докажите, что всегда можно сделать разрезы так, чтобы из всех полученных палочек складывался многоугольник с равными углами (каждая палочка должна быть стороной многоугольника). (*А. Шаповалов*)

8. Может ли в результате перемножения двух квадратных трёхчленов с целыми коэффициентами получиться выражение $x^4 + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 6$, где числа a, b, c целые?

9. В прямоугольном треугольнике ABC угол B равен 30°. Биссектриса угла B, отразившись от стороны AC (по закону «угол падения равен углу отражения»), пересекла гипотенузу BC в точке D. Докажите, что точка D лежит на биссектрисе угла A. (*Д. Калинин*)

10. У Пети есть две шахматные доски, клетки каждой из которых как-то пронумерованы числами от 1 до 64. Петя утверждает, что для любого замкнутого обхода первой доски хромой ладьёй (которая ходит только на соседнюю клетку) если записать номера клеток в порядке их обхода, то на второй доске эта последовательность номеров даст замкнутый обход конём. Докажите, что Петя ошибается. (*О. Крижановский*)

11. На доске написано $n > 1$ натуральных чисел. Никакое из них не делится ни на одно другое. Докажите, что сумма этих чисел больше n^2. (*А. Шаповалов*)

12. Одна из высот треугольника делится ортоцентром в отношении $2:1$, считая от вершины. Докажите, что отрезок, соединяющий основания двух других высот, делит её пополам. (*И. Макаров*)

13. Все натуральные числа покрашены в n цветов, причём каждый цвет встречается не менее n раз. Известно, что цвет суммы зависит только от цветов слагаемых (например, синее плюс красное всегда красное). Докажите, что и цвет произведения однозначно определяется цветами сомножителей. (*С. Усов*)

Командная олимпиада

14. Студентам выплачивают стипендии 500, 600, 700, 800, 900 или 1000 рублей. 20 студентов должны получить стипендии на общую сумму 18500 рублей. Кассир получил все деньги 500-рублёвыми купюрами. Какое наименьшее количество купюр он должен разменять на 100-рублёвые купюры, чтобы наверняка иметь возможность выплатить стипендию каждому студенту без сдачи? (*А. Блинков*)

15. Есть лист клетчатой бумаги и карандаши **а**) шести цветов; **б**) десяти цветов; **в**) семи цветов. Какое наименьшее число клеток надо закрасить так, чтобы для каждых двух разных цветов нашлись две клетки этих цветов, граничащие по стороне? (*С. Токарев*)

16. **а**) На столе в ряд лежат 100 кучек по одному ореху. Два игрока ходят по очереди. За один ход нужно найти какие-нибудь две соседние кучки (то есть без кучек между ними), где правая не меньше левой, и объединить их в одну. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

б) В аналогичной игре для 2007 кучек победитель получает последнюю созданную им кучку. Какое наибольшее число орехов может гарантированно получить победитель, как бы ни играл соперник? (*С. Усов*)

17. Клетчатая фигура состоит из 20 клеток и не является прямоугольником. Оказалось, что её можно разрезать по линиям сетки на любое число равных частей, являющееся делителем 20. Приведите пример такой фигуры. (*Е. Горская*)

18. **а**) Приехав от бабушки, Богдан через несколько дней написал ей первое электронное письмо. Промежуток между первым и вторым письмом длился на день дольше, между вторым и третьим – ещё на день дольше и так далее. Докажите, что есть такой день недели, по которым бабушка писем от Богдана не получает.

б) Приехав от бабушки, марсианин Надгоб через несколько дней написал ей первое электронное письмо. Промежуток между первым и вторым письмом длился на день дольше, между вторым и третьим – ещё на день дольше и так далее. Спустя длительное время бабушка рассортировала письма по дням недели, и на каждый день пришлось хотя бы одно письмо. Докажите, что в марсианской неделе чётное число дней. (*И. Богданов*)

19. В наборе семь гирь. Арбуз можно уравновесить тремя гирями, можно четырьмя, а можно и пятью. Докажите, что одну из гирь набора можно уравновесить несколькими другими. (*А. Шаповалов*)

20. **а**) Дедушка с двумя внуками отправились в город на ёлку. От их дома до ёлки 33 версты. У них есть сани с лошадью, управлять которыми может только дедушка и скорость которых 25 вёрст в час, а с пассажиром – 20 вёрст в час (двух внуков одновременно в сани не посадишь). Каждый из внуков идёт по дороге со скоростью 5 вёрст в час. Как им надо действовать, чтобы через 3 часа всем троим прибыть на ёлку?

б) Дедушка с тремя внуками отправились в город на ёлку. От их дома до ёлки 35 вёрст. У них есть сани с лошадью, управлять которыми может только дедушка и скорость которых 25 вёрст в час, а с пассажиром – 20 вёрст в час (двух или трёх внуков одновременно в сани не посадишь). Каждый из внуков идёт по дороге со скоростью 5 вёрст в час. Как им надо действовать, чтобы через 4 часа всем четверым прибыть на ёлку? (*А. Шаповалов*)

21. Назовём набор из трёх палочек хорошим, если из них можно сложить треугольник.

а) Есть 2007 палочек, длины которых равны 1, 2, …, 2007. Каких наборов из них можно составить больше: хороших или не хороших?

б) Есть 1998 палочек, длины которых равны 10, 11, …, 2007. Среди хороших наборов, составленных из них, каких больше: тех, из которых складывается остроугольный треугольник, или тех, из которых складывается тупоугольный? (*А. Шаповалов*)

22. Точка C лежит на отрезке AB. По одну сторону от прямой AB построены равносторонние треугольники ACD и BCE. Во сколько раз медиана треугольника DCE, проведённая из вершины C, меньше суммы $AE + BD$? (*Д. Калинин*)

23. **а**) Три прямые $y = ax + b$, $y = cx + d$, $y = ex + f$ ограничивают треугольник. Коэффициенты a, b, c, d, e, f переставили в другом порядке, полученные прямые ограничили новый треугольник, не совпадающий с прежним. Может ли новый треугольник оказаться равным прежнему?

б) Та же задача, если все коэффициенты a, b, c, d, e, f различны. (*А. Шаповалов*)

24. Дано пять действительных чисел: коэффициенты квадратного трёхчлена и его корни. Произведение всех пяти чисел положительно. Сколько среди этих чисел положительных? (*Б. Френкин*)

25. Вне остроугольного треугольника ABC отмечена точка D так, что $\angle ABC + \angle ABD = \angle ACB + \angle ACD = 180°$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке AD. (*Д. Калинин*)

26. Числа a и b таковы, что $a^3 - 3ab^2 = 8$ и $b^3 - 3a^2b = \sqrt{61}$. Докажите неравенство $a + b < \sqrt{5}$.

27. Решите в натуральных числах уравнение $1 + 2 + \ldots + 2^x = 3^y$. (*В. Сендеров*)

Первый тур

28. На столе лежат 99 карточек с числами 1, 2, …, 99. Два игрока по очереди разбирают карточки, по одной за ход. Когда карточки на столе заканчиваются, каждый вычисляет сумму чисел на полученных им карточках. Выигрывает тот, у кого сумма кратна 7. Может ли кто-то из игроков гарантировать себе победу, и если да, то кто? (*А. Шаповалов*)

29. Число 2007 разбито на несколько (более одного) слагаемых, имеющих одну и ту же сумму цифр. Каково наименьшее количество слагаемых? (*А. Шаповалов*)

30. Каждый житель страны является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда врёт. Однажды за круглым столом собралась компания из 19 человек. Каждый из собравшихся заявил, что оба его соседа – лжецы. На почве столь резких высказываний разразился небольшой скандал, в результате которого часть компании покинула застолье. После этого каждый из оставшихся с удовлетворением объявил, что теперь оба его соседа – рыцари. «И в самом деле, среди вас теперь ни одного лжеца», – согласился с ними последний из покидавших компанию.

Тем временем ушедшие организовали новое собрание, вновь сев за круглый стол. Каждый из сидящих за этим столом произнёс, что среди его соседей ровно один рыцарь. Сколько человек осталось сидеть на своих местах после раскола компании? (*В. Лецко*)

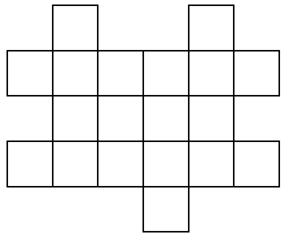
31. В математической олимпиаде участвовали десять школьников, которым было дано девять задач. Если какую-то задачу решили n человек, то каждый из решивших получал за эту задачу $\frac{10}{n}$ баллов. Победитель определялся по сумме баллов, полученных за все решённые задачи. Какое наименьшее число баллов мог набрать единоличный победитель? (*А. Блинков*)

32. Колонна солдат-новобранцев выстроилась несколькими одинаковыми шеренгами, составляющими прямоугольник. По команде «Смирно» некоторые из них с перепугу сделали поворот направо, другие – налево, третьи – кругом, а кто-то вообще остолбенел и остался неподвижен. Далее каждую секунду происходит следующее: каждый новобранец, оказавшийся лицом к лицу с другим солдатом, делает поворот направо. Докажите, что рано или поздно такие повороты прекратятся. (*И. Акулич*)

33. **а**) Десять кусков сыра требуется разложить на три кучки одинаковой массы с равным числом кусков в каждой кучке, разрезав предварительно несколько кусков на части. Каким наименьшим количеством разрезов можно гарантированно обойтись? При каждом разрезе один кусок делится на две части.

б) Та же задача для 50 кусков сыра, которые требуется разложить на семь кучек. (*А. Шаповалов*)

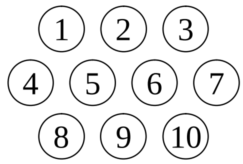
34. Для того чтобы обменяться протоколами прошедших матбоёв, из «Берендеевых полян» и «Алых парусов» одновременно выехали два члена жюри. Известно, что один из них за 40 минут успел проехать половину пути и ещё 2 км, а другой за час не доехал 3 км до середины пути. Через какое время после выезда они встретились? (*С. Токарев*)



35. Из фигуры, изображённой на рисунке, требуется убрать одну клетку так, чтобы получившуюся фигуру можно было разрезать на три равные части. Покажите, как это сделать двумя различными способами. (*Е. Горская*)

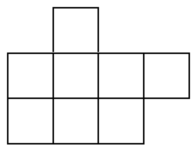
36. Существуют ли различные натуральные числа x, y, z, для которых $x + \text{НОД}(y, z) = y + \text{НОД}(z, x) = z + \text{НОД}(x, y)$? (*С. Токарев*)

37. Десять пронумерованных круглых фишек расположены так, что образуют две пересекающиеся шестилепестковые «ромашки» с центральными фишками 5 и 6 (см. рисунок). Каждую «ромашку» можно поворачивать вокруг центральной фишки на углы, кратные 60°. Можно ли при помощи таких поворотов получить расположение, в котором центральные фишки поменяны местами, а остальные находятся на своих исходных местах? (*Н. Авилов*)



38. Вася задумал три числа. Для каждой пары задуманных чисел он нашёл разность между их произведением и суммой, уменьшенной на единицу. Оказалось, что одна из этих разностей отрицательна, другая положительна. Каков знак третьей разности? (*Б. Френкин*)

39. На клетчатой бумаге нарисовали круг и выделили все клетки, целиком оказавшиеся внутри круга. Могли ли они образовать фигуру, изображённую на рисунке? (*Ю. Игнатов*)



40. Оля загадала шестизначное число, в котором встречаются все цифры от 1 до 6. Коля стремится отгадать это число, выписывая свои шестизначные числа с таким же свойством. Оля сообщает, какие цифры в её числе стоят левее, чем в Колином, какие – правее, а какие – в тех же самых разрядах. Какое наименьшее количество чисел должен выписать Коля, чтобы наверняка узнать Олино число? (*С. Токарев*)

41. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = AB$. На стороне AB отмечена точка E так, что середина отрезка CE лежит на BD. Докажите, что $BE = CD$. (*С. Мазаник*)

42. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = 25z, \\ yz = 49x, \\ zx = 9y. \end{cases}$

43. Для положительных чисел a и b докажите неравенство $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}$.

44. На плоскости проведены четыре прямые, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. На каждой из этих прямых три точки пересечения с остальными выделяют два отрезка. Могут ли длины восьми полученных отрезков равняться 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

45. Найдите десятизначное число, делящееся на 11111, все цифры которого различны.

46. Из точки K, лежащей вне угла A, на стороны этого угла опущены перпендикуляры KM и KN. Первый перпендикуляр пересекается с одной из сторон угла в точке O, при этом $KO:OM=p:q$ и $AO:ON=u:v$. Найдите отношение $AM:KN$.

47. Сколькими способами можно раздать колоду из 52 карт четырём игрокам так, чтобы каждый получил по три карты трёх мастей и четыре карты четвёртой масти?

48. Пусть n – нечётное натуральное число, имеющее ровно два различных простых делителя. Докажите, что сумма всех делителей числа n меньше $2n$.

49. На плоскости дано конечное множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Известно, что для каждых трёх точек A, B, C из этого множества ортоцентр треугольника ABC также принадлежит этому множеству. Докажите, что множество состоит не более чем из четырёх точек.

Второй тур

50. В Лиге чемпионов стран Балтии участвуют шесть футбольных команд: по две от каждой страны – Латвии, Литвы и Эстонии. Они хотят провести однокруговой турнир, причём все три матча каждого тура должны проходить одновременно. Судейская бригада из каждой страны может судить либо матч двух команд из своей страны, либо матч, в котором команды из их страны не играют. Можно ли так составить расписание туров, чтобы для обслуживания каждого тура приглашать ровно по одной судейской бригаде из каждой страны? (*А. Блинков*)

51. **а**) Саша и Маша разыгрывают конфеты. Саша сообщает Маше число, кратное 9. Маша называет своё число и находит сумму его цифр. Если Сашино и Машино числа различаются на эту сумму цифр, то конфету получает Маша, иначе Саша. Сможет ли Маша забрать себе все конфеты?

б) Верно ли, что любое натуральное число, кратное 9, отличается от некоторого натурального числа n на сумму цифр этого числа n? (*И. Акулич*)

52. На столе лежат 100 карточек, на которых написаны все натуральные числа от 1 до 100. Их нужно разложить по ящикам так, чтобы ни в каком ящике не нашлось двух карточек, разность чисел на которых равна **а**) 2, 3 или 5; **б**) 2, 3 или 6. Какое наименьшее количество ящиков для этого потребуется? (*В. Каскевич*)

53. В клетках таблицы 3×3 расставлены все натуральные числа от 1 до 9. Оказалось, что четыре суммы, составленные из чисел второй строки, второго столбца и каждой из двух главных диагоналей, равны одному и тому же числу. Найдите все значения, которые может принимать это число. (*С. Мазаник*)

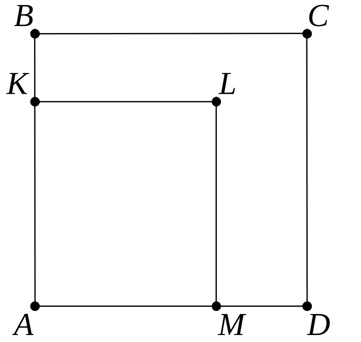
54. **а**) На шахматную доску, первоначально пустую, по одной выставляются белые и чёрные ладьи в любом порядке. В момент выставления ладья должна побить поровну белых и чёрных ладей (возможно, ни одной). Какое наибольшее количество ладей может быть выставлено?

б) Та же задача, но ладьи выставляются только на край шахматной доски.

в) На край шахматной доски, первоначально пустой, по одной выставляются ладьи. В момент выставления ладья должна побить чётное число уже выставленных ладей (возможно, ни одной). Какое наибольшее количество ладей может быть выставлено? (*А. Шаповалов*)

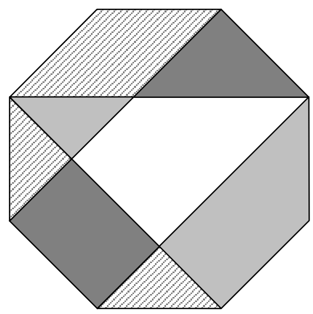
55. Однажды Вася и Петя пошли в казино. Каждый из них несколько раз проиграл и несколько раз выиграл, и вышли они оттуда с одинаковой суммой денег. Вася спросил: «Интересно, было бы у нас поровну денег, если бы каждый из нас выиграл столько, сколько проиграл другой, и проиграл столько, сколько выиграл другой?» Помогите Пете ответить на этот вопрос.

56. Два сына делили квадратный участок земли, доставшийся им в наследство. Старший захотел взять часть в виде прямоугольника $AKLM$, площадь которого равна половине площади квадрата $ABCD$, причём отрезок DM составляет треть DA (см. рисунок). Младший не согласился и предложил разделить исходный участок ломаной ALC. Какую из двух образовавшихся частей нужно выбрать старшему, чтобы получить больше? (*Д. Калинин*)



57. Турнир матбоёв в «Берендеевых полянах» продолжался семь дней. В нём участвовали 28 команд, поэтому в столовой накрывалось 28 столов. В первый же день несколько команд сели не за свой стол (в течение одного дня каждая команда ест за одним и тем же столом). Во второй день команд, сидящих не за своим столом, оказалось на две больше, в третий день – ещё на две больше и так далее. По окончании турнира Григорий Вячеславович подсчитал, что каждая команда всё-таки сумела поесть за отведённым ей столом не менее пяти дней. Сколько команд сидело за своим столом в последний день? (*А. Блинков*)

58. Правильный восьмиугольник разрезан на части, которые закрашены в четыре цвета (см. рисунок). Докажите, что каждым цветом закрашена одна и та же площадь. (*В. Произволов*)



59. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведена биссектриса AD. На сторонах AB и AC отмечены такие точки E и F соответственно, что $AE = BD$ и $AF = AB$. Докажите, что точка пересечения прямых AD и EF лежит на высоте треугольника ABC. (*Д. Калинин*)

60. Можно ли числа **а**) 1, 2, …, 100; **б**) 1, 2, …, 2007 записать в строку так, чтобы из каждых трёх записанных подряд чисел одно равнялось сумме двух других? (*И. Акулич*)

61. Найдутся ли такие различные положительные числа a, b, c, что уравнения $ax + b = c$ и $\frac{x}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ имеют общий корень?

62. В одном стакане было 100 мл раствора кислоты, причём доля кислоты составляла 40%, а в другом – 150 мл раствора с долей кислоты 50%. Ложку раствора из первого стакана перелили во второй и после перемешивания такую же ложку перелили из второго стакана в первый. В результате доля кислоты в каждом из стаканов по-прежнему выражалась целым числом процентов.

а) Найдите доли кислоты в стаканах после переливаний.

б) Найдите вместимость ложки. (*Ю. Игнатов*)

63. Докажите, что если $(a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$, то среди чисел a, b, c найдутся два числа, сумма которых равна нулю. (*В. Произволов*)

64. **а**) Дан квадратный трёхчлен с ненулевыми коэффициентами, имеющий действительный корень. Всегда ли можно поставить его коэффициенты в таком порядке, чтобы полученный трёхчлен имел отрицательный корень?

б) Существуют ли такие три действительных числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он будет иметь два положительных корня, а если в другом – два отрицательных? (*Б. Френкин*)

65. Решите в натуральных числах уравнение **а**) $2^x \cdot x = 2^y \cdot (x + y)$; **б**) $2^x \cdot (x + 1) = 2^y \cdot (x + y)$. (*В. Сендеров*)

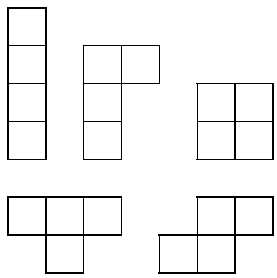
66. Пусть p и q – произвольные целые числа. Последовательность задана следующими условиями: $a_0 = p$, $a_n = (n + 1)a_{n-1} + (-1)^n q$ при всех $n \geq 1$. Докажите, что a_n делится на n для всех натуральных n. (*И. Акулич*)

67. Пете и Васе задали следующую задачу: «В прямоугольном треугольнике с катетами a и b провели биссектрису прямого угла. В получившиеся при этом два треугольника вписали по окружности. Найдите их радиусы». Пете и Васе были известны конкретные числовые значения a и b (у каждого свои). У Пети получились ответы 2 и $\sqrt{2}$, а у Васи – 3 и $\sqrt{3}$. Докажите, что хотя бы один из них ошибся. (*В. Лецко*)

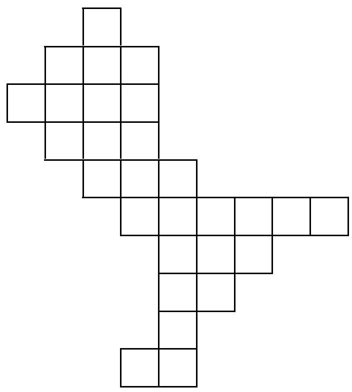
68. Дан куб с ребром длины $n > 1$, где n – натуральное число. Сколькими способами можно разбить его на бруски размером $1 \times 1 \times n$? Куб неподвижен, то есть разные способы, которые при повороте куба совпадают, считаются различными. (*В. Брагин*)

Третий тур

69. Четыре футбольные команды играли на вылет: проигравшая команда садилась отдыхать и выходила играть следующая, в случае ничьей садились отдыхать обе команды, а играли две другие. Известно, что команды A и B, игравшие в первом матче, сыграли по три раза, команда C (следующая по очереди) – также три раза, а команда D – семь раз. Восстановите исход как можно большего количества матчей. (*А. Блинков*)



70. В плоском конструкторе «В мире животных» есть четырёхклеточные детали пяти видов. Петя сложил фигуру страуса (см. рисунок), использовав деталь каждого вида хотя бы по одному разу. Какие детали он обязан был использовать несколько раз? Каждую деталь можно поворачивать и переворачивать. (*Е. Горская*)



71. **а**) Есть 12 одинаковых на вид монет двух сортов, по шесть монет каждого сорта. За одно взвешивание про любую группу можно узнать, сколько в ней монет первого сорта. Как за два взвешивания найти две монеты разного сорта (какая из них какого сорта, выяснять не надо)?

б) Как в аналогичной задаче для 28 монет, по 14 монет каждого сорта, найти две монеты разного сорта за три взвешивания? (*А. Шаповалов*)

72. На каждом листе тетради из 96 листов Дима нарисовал страшную рожу (с одной стороны листа). Если Дима положит тетрадь на стол, то некоторые рожи будут «смотреть» вверх, а остальные – вниз. Верно ли, что можно открыть тетрадь в таком месте (или вообще её не открывать), чтобы вверх и вниз «смотрело» одинаковое количество рож? (*И. Акулич*)

73. В «Берендеевых полянах» для всех школьников были проведены математическая карусель, а также командная и личная олимпиады. Оказалось, что среди каждых трёх человек найдутся два, которые были награждены в одном и том же соревновании. Верно ли, что из этих соревнований можно выбрать такое, что каждый награждённый в нём школьник был награждён в каком-то ещё соревновании? (*Д. Калинин*)

74. Оракул предсказал, что война начнётся через три недели, а Кассандра сказала, что война будет через 12 недель. Если бы исполнилось предсказание Оракула, то война длилась бы вдвое дольше, чем на самом деле. А если бы исполнилось предсказание Кассандры, то она длилась бы вдвое меньше, чем на самом деле. Сколько же на самом деле длилась война? (*Т. Гейдер*)

75. Назовём четырёхзначное число временным, если можно расположить его цифры и поставить посередине двоеточие так, чтобы получилось какое-то показание электронных часов (например, временным является число 2007, так как часы могут показывать время 07:20). Найдите наименьшее не временное число, большее 2007. (*А. Шаповалов*)

76. Гриша задумал натуральное число и перемножил все его делители. Мог ли он получить в результате 1000000000?

77. Каждый из членов мирового правительства знает по два языка и может общаться без переводчика со всеми своими коллегами, кроме одного. Сколько членов может насчитывать правительство? (*С. Токарев*)

78. Три сестры торговали на рынке поштучно цыплятами. У первой было 15 цыплят, у второй – 29, у третьей – 41. Каждая из них часть товара продала утром, а часть – вечером. Утренняя цена у всех была одинаковая, и вечерняя цена тоже была одинаковая, но более низкая. Определите, на сколько процентов вечерняя цена была ниже утренней, если известно, что к вечеру весь товар был распродан и дневная выручка у всех сестёр оказалась одинаковой. (*Ю. Игнатов*)

79. Пусть m и n – натуральные числа, причём $m < n$. Докажите, что n представимо в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых – делитель числа m, а другое взаимно просто с m. (*С. Конягин, А. Спивак*)

80. С помощью циркуля и линейки постройте на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC точки D, E, F соответственно так, чтобы выполнялись равенства $AF = DF$ и $BE = DE$, а середина отрезка EF лежала **а**) на биссектрисе; **б**) на медиане треугольника ABC, проведённой из вершины C (известно, что такие точки существуют). (*Д. Калинин*)

81. Аппарат выдаёт карточки с различными пятизначными числами. Какое наибольшее количество карточек может выдать аппарат так, чтобы не нашлось двух карточек, на которых вместе встречаются все десять цифр? (*Д. Калинин*)

82. Решите систему неравенств $\begin{cases} 6 \le x \le y \le z \le 8, \\ (x+3y+3z)^2 \le 48xz. \end{cases}$ (*С. Дворянинов*)

83. Найдите все простые числа вида **а**) $(2+n)^4 - 81n$; **б**) $(3+n)^4 - 256n$, где n натуральное. (*В. Сендеров*)

84. Дуга AB окружности с центром O равна 60°. Пусть M – произвольная точка на дуге AB. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника $AMBO$, перпендикулярны.

85. Про каждую пару депутатов думы известно, могут они работать вместе или могут только дискутировать (при этом есть депутат, который с кем-то может работать, а с кем-то только дискутировать). Думу удалось разбить на две группы, в одной из которых все пары рабочие, а в другой – все дискуссионные. Оказалось, что при переходе любого депутата в другую группу свойство однотипности всех пар в группе нарушается. Докажите, что по-другому разбить думу на две такие группы (рабочую и дискуссионную) нельзя. (*В. Гурвич*)

86. Назовём набор из трёх палочек хорошим, если из них можно сложить треугольник. Найдётся ли **а**) не более 6000 палочек; **б**) 25 палочек разной длины, из которых можно выбрать хороший набор ровно 2007 способами? (*А. Шаповалов*)

87. На турнир матбоёв приехали 1000 школьников. Александр Васильевич и Дмитрий Александрович играют в следующую игру. Каждым ходом игрок выбирает подмножество, содержащее от 1 до 999 школьников, и даёт им задачу. При этом никакие два из выбранных подмножеств не должны содержаться одно в другом. Ходят по очереди, начинает Александр Васильевич. Выигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

88. Даны две концентрические окружности: малая и большая. Точки A и B лежат на малой окружности и диаметрально противоположны, а C – произвольная точка большой окружности. Лучи CA и CB впервые пересекают малую окружность в точках K и L соответственно (возможно, совпадающих с A или B). При каких положениях точки C длина отрезка KL будет наибольшей? (*С. Дворянинов*)

89. Петя вычислил среднее арифметическое некоторого множества различных степеней двойки. Катя вычислила среднее арифметическое некоторого другого множества различных степеней двойки. Может ли Петино число быть равно Катиному? (*О. Крижановский*)

90. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{3a^3}{c^2+ca+a^2}+\frac{3b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{3c^3}{b^2+bc+c^2}\le\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

(*Д. Калинин*)

Финал

91. Григорий Вячеславович планировал, что стоимость проживания на базе составит a рублей с человека в день, где a – трёхзначное число, большее 100. Узнав, что команд очень много, он снизил плату на b процентов, где b – натуральное число. Однако на одной базе все команды не поместились, поэтому турнир проводился на двух базах, а новая стоимость была увеличена также на b процентов. Могло ли оказаться, что итоговая стоимость проживания отличалась от первоначальной ровно на 1 рубль? (*А. Блинков*)

92. На прямолинейном участке дороги, соединяющей «Берендеевы поляны» с «Алыми парусами», через каждые 10 метров было вкопано 2007 столбов. Нетрезвый водитель умудрился сбить некоторые из них. Позже работники ГИБДД обнаружили, что все попарные расстояния между оставшимися столбами различны. Какое наименьшее количество столбов могло быть сбито?

93. Докажите неравенство $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{10}<\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{100}$.

94. В теннисном турнире, проведённом по олимпийской системе, участвовали **а**) 128 спортсменов; **б**) 2^{100} спортсменов. Все матчи одного тура проходили одновременно, и каждый из них судил один арбитр. Известно, что арбитр, судивший финал, не судил больше ни одного матча. Докажите, что были по крайней мере ещё два арбитра, судившие по одному матчу. (*Б. Френкин*)

95. **а**) На некоторых клетках доски 10×10 лежит по одной горошине, причём на всех горизонталях и вертикалях горошин поровну и больше одной. Гарик и Вера ходят по очереди, начинает Гарик. За один ход можно снять с доски любую горошину. Если образуется пустая горизонталь, выигрывает Гарик, а если пустая вертикаль – Вера. Если же горизонталь и вертикаль освобождаются одновременно, то выигрывает сделавший последний ход. Докажите, что Вера может выиграть, как бы ни играл Гарик.

б) Докажите то же утверждение, если доска имеет размеры $n \times n$, а на каждой клетке может быть не более двух горошин. (*В. Гурвич*)

96. Можно ли разрезать квадрат 6×6 на пять прямоугольников периметра 12? (*А. Шаповалов*)

97. Турнир по боксу прошёл по олимпийской системе: в каждом туре участники разбивались на пары, проигравший выбывал, а победивший проходил в следующий тур. Некоторые боксёры начинали не с первого тура, но в каждом туре добавлялось не более одного боксёра. Всего в турнире участвовали 2007 человек, и он прошёл за 11 туров. В каких турах добавлялись боксёры? (*Д. Калинин*)

98. Математик В предложил математикам А и Б такую задачу: «Я загадал три различных натуральных числа, произведение которых не превосходит 50. Сейчас я сообщу А это произведение, а Б – сумму загаданных чисел. Попробуйте отгадать эти числа». Узнав произведение и сумму соответственно, А и Б вступили в диалог.

А: «Я не знаю этих чисел».

Б: «Если бы моё число было произведением, я бы знал загаданные числа».

А: «Но я всё равно не знаю этих чисел».

Б: «Да и я не знаю».

А: «А я уже знаю их».

Б: «И я тоже знаю».

Какие же числа загадал математик В? (*В. Лецко*)

99. В строку без пробелов выписаны числа натурального ряда: 123456789101112… Далее цифры полученной последовательности попеременно складываются на разные чаши весов: цифра 1 – на левую чашу, цифра 2 – на правую, цифра 3 – на левую и так далее. Если на очередном шаге сумма цифр на одной чаше оказывается больше, чем на другой, то это чаша перевешивает. Докажите, что весы никогда не перестанут менять состояние. (*А. Жуков*)

100. Каждые две противоположные стороны шестиугольника $ABCDEF$ равны и параллельны, а треугольник ACE равносторонний. Докажите, что для некоторой точки O все три треугольника AOB, COD, EOF также равносторонние. (*Д. Калинин*)

101. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 13 трапеций.

(*Л. Емельянов*)

102. Фома и Ерёма делят клад из **а**) 25 золотых и 25 серебряных монет; **б**) 100 золотых и 100 серебряных монет. Сначала Фома раскладывает монеты в ряд в каком хочет порядке. После этого Ерёма начинает делёжку. Он берёт первую монету из ряда и либо забирает её себе, либо отдаёт Фоме. Затем Фома берёт вторую монету из ряда и тоже либо забирает её себе, либо отдаёт Ерёме. Так, чередуясь, они распределяют по порядку монеты. Как только у кого-то из них накапливается половина имеющихся монет, другой забирает все оставшиеся. Какое наибольшее число золотых монет может гарантированно получить Фома? (*А. Шаповалов*)

103. Дорога от Судиславля до Москвы состоит из трёх участков: Судиславль – Кострома (50 км), Кострома – Ярославль (80 км) и Ярославль – Москва (260 км). Автобус, скорость которого нигде не превышала 80 км/ч, проехал от Судиславля до Ярославля за 2 часа, а от Костромы до Москвы – за 5 часов. Какое время автобус мог быть в пути?

(*С. Волчёнков*)

104. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно проходят через центры друг друга и пересекаются в точках A и B. Прямая O_1O_2 пересекает окружность ω_2 в точке C, отличной от O_1. Хорда AD окружности ω_2 параллельна прямой O_1O_2, точка E – середина отрезка AB, а F – точка пересечения отрезков AC и BD. Докажите, что треугольник AEF равносторонний. (*И. Воронович*)

105. Куб $n \times n \times n$ состоит из n^3 кубических клеток. Хромая ладья за один ход передвигается на одну клетку в любом параллельном рёбрам куба направлении, причём никакие два хода подряд она не делает в одном направлении. Замкнутый маршрут хромой ладьи прошёл через все клетки по разу.

а) Возможно ли это при $n = 4$?

б) При каких $n > 1$ такое возможно? (*А. Шаповалов, О. Крижановский*)

106. Решите в целых числах уравнение $x^3 + y^3 = 2^{2007}$. (*С. Мазаник*)

107. Квадратное поле разбили на прямоугольные участки, проведя 66 прямых параллельно сторонам квадрата. Назовём участок завидным, если его площадь больше площади каждого соседнего с ним по стороне участка. Каково наибольшее возможное число завидных участков? (*В. Брагин*)

108. На плоскости проведена прямая l и вне её отмечена точка A. Имеется обломанная линейка (без делений) длины 9 см и ржавый циркуль, которым можно рисовать только окружности радиуса 4 см. Докажите, что с помощью этих двух инструментов можно опустить перпендикуляр из точки A на прямую l.

109. Найдите все простые числа p и q, для которых уравнение $x^2 + px + q = 100$ имеет два целых корня. (*В. Каскевич*)

110. На доске $n \times n$ выделены клетки главной диагонали, соединяющей левый нижний угол с правым верхним. За одну операцию разрешается выбрать любую клетку на этой диагонали, поставить по шашке на все свободные клетки справа от неё и снять все шашки с клеток под ней. Какое количество различных расположений шашек можно получить такими операциями из пустой доски? Пустая доска тоже считается за одно расположение. (*П. Грозман*)

111. Решите в натуральных числах уравнение $9^x = 2y^2 + 1$. (*В. Сендеров*)

112. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ составляют положительную геометрическую прогрессию. Зная значения $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$, найдите произведение $P = a_1 a_2 \ldots a_n$.

113. Функция натурального аргумента задана по следующему правилу:
$f(n) = -1$, если n делится на 53;
$f(n) = n \bmod (n \bmod 53)$ в остальных случаях.
При каком наименьшем n функция $f(n)$ достигает своего максимума? (*В. Лецко*)

114. 15 аэропортов связаны двусторонними авиалиниями в единую сеть, то есть из каждого аэропорта можно долететь в любой другой (возможно, с пересадками). Пять из этих аэропортов ключевые: при закрытии любого из них единая сеть распадается. Каково наибольшее возможное число авиалиний в такой сети? Между каждыми двумя аэропортами есть не более одной авиалинии. (*В. Гурвич*)

115. Бумажный квадрат $ABCD$ со стороной 5 частично приклеен к столу по треугольнику AKL, где точка K лежит на стороне AB и $AK = 3$, а точка L лежит на стороне AD и $AL = 4$. Неприклеенную часть квадрата разрешается перегибать по прямой, не проходящей через точки C, D, K, L и не пересекающей приклеенный треугольник. Разгибать сгиб обратно запрещено. Как за два перегиба совместить отрезки BC и KL? (*О. Крижановский*)

116. Положительные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Докажите неравенство $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^3}} \geq 2$. (*Р. Пиркулиев*)

Источник: http://tursavin.ru