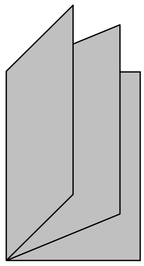
# XI турнир математических боёв имени А.П. Савина

## База отдыха «Берендеевы поляны»
## Костромская область
## 25 июня - 1 июля 2005 года

# Личная олимпиада



**1**. В магазине продаётся шоколад в виде букв английского алфавита. Одинаковые буквы стоят одинаково, а разные имеют различные цены. Известно, что слово ONE стоит 6 долларов, слово TWO – 9 долларов, а слово ELEVEN – 16 долларов. Сколько стоит слово TWELVE? (*Г. Гальперин*)

**2**. Покажите, как из книжки, состоящей из трёх листов (см. рисунок), можно вырезать лист Мёбиуса.

**3**. Перед экзаменом Вася вырвал из учебника 20% страниц. Докажите, что если нумерация страниц начиналась с 1, то сумма номеров оставшихся страниц делится на 4. (*В. Гуровиц*)

**4**. В каждой вершине треугольника записано натуральное число, на каждой стороне – произведение чисел, записанных в её концах, а внутри треугольника – произведение чисел, записанных в его вершинах. Сумма всех семи чисел равна 1000. Какие числа записаны в вершинах треугольника? (*А. Шаповалов*)

**5**. Прямоугольник разрезан на нечётное количество равных частей. Верно ли, что все они являются прямоугольниками? (*С. Маркелов*)

**6**. В бесконечном городе все кварталы – квадраты одного размера. Велосипедист стартовал с перекрёстка. Через полминуты в том же направлении выехал другой велосипедист. Каждый едет с постоянной скоростью 1 квартал в минуту и на каждом перекрёстке поворачивает либо направо, либо налево. Могут ли они встретиться?
(*М. Вельтищев, П. Купцов*)

**7**. Углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны 15° и 30°. Какой угол образует с этой стороной проведённая к ней медиана? (*М. Волчкевич*)

**8**. Докажите, что если графики двух квадратных трёхчленов симметричны относительно прямой, то эта прямая параллельна одной из координатных осей или совпадает с ней. (*А. Блинков*)

**9**. На круглой арене цирка (но не в её центре) стоит тумба, на которой сидит лев. По команде укротителя лев спрыгивает с тумбы и бежит по прямой. Добежав до бортика, он поворачивает на 90°, снова добегает до бортика, поворачивает на 90° и бежит дальше по арене. Докажите, что на арене (но не на тумбе) можно положить кусок мяса так, что, независимо от первоначального направления движения, лев окажется в точке с мясом.
(*М. Панов*)

**10**. Таблица $3\times 3$ заполнена нулями. За один ход разрешается увеличить на единицу числа в трёх клетках, образующих уголок. Можно ли за несколько ходов получить таблицу, все числа в которой равны и положительны?

**11**. Для положительных чисел $a$ и $b$ докажите неравенство

$$\sqrt{1-\frac{a^2}{(a+b)^2}}+\sqrt{1-\frac{b^2}{(a+b)^2}}\le\sqrt{3}.$$ (*В. Сендеров*)

**12**. В однокруговом футбольном турнире участвовали 11 команд. Оказалось, что каждая команда забила в своём первом матче один гол, во втором – два гола, …, в десятом – десять голов. Какое наименьшее число ничьих могло быть в таком турнире? (*И. Акулич*)

**13**. Внутри треугольника $ABC$ выбрана точка $P$. Через неё проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Докажите, что если шесть точек пересечения этих прямых со сторонами треугольника лежат на одной окружности, то её центр лежит на прямой $OP$, где $O$ – центр описанной окружности треугольника $ABC$. (*А. Акопян*)

**14**. Существует ли такая арифметическая прогрессия, составленная из 2005 натуральных чисел, что ни один из её членов не является точным квадратом, однако их произведение – точный квадрат? (*В. Сендеров*)

## Командная олимпиада

**15**. В равенстве $\text{АХ}\cdot\text{ЭХ}=\text{ХЭ}\cdot\text{ХА}$ одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные. Докажите, что $\text{А}:\text{Х}=\text{Х}:\text{Э}$. (*А. Жуков*)

**16**. На плоскости нарисовано четыре равных треугольника так, что каждые два из них имеют ровно две общие вершины. Верно ли, что все они имеют общую вершину? (*В. Гуровиц*)

**17**. Матбой начался между 10 и 11 часами, когда часовая и минутная стрелки были направлены в противоположные стороны, а закончился между 16 и 17 часами, когда стрелки совпали. Сколько времени продолжался матбой? (*А. Заславский*)

**18**. Каждую букву русского алфавита закодировали последовательностью из нулей и единиц (не обязательно одинаковой длины). Используя этот код, Сеня записал слово СЛОН. Оказалось, что полученная последовательность нулей и единиц расшифровывается однозначно. Какое наименьшее количество цифр могло в ней быть? (*А. Акопян*)

**19**. На доске написаны все натуральные числа от 1 до $n$. Два игрока по очереди вычёркивают какое-нибудь число и все числа, не взаимно простые с ним (если такие есть). Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Докажите, что найдётся такое $n>1000$, для которого первый игрок может обеспечить себе победу. (*Д. Григоренко*)

**20**. Можно ли, используя по одному разу каждую из цифр от 0 до 9, составить число, обладающее следующими свойствами: если в нём вычеркнуть двойку, то оно поделится на 2; если вычеркнуть тройку, то оно поделится на 3; …; если вычеркнуть девятку, то оно поделится на 9? (*И. Акулич*)

**21**. На клетчатом листе по линиям сетки нарисован многоугольник, который можно разрезать на 30 квадратиков $2\times 2$. Какое наибольшее количество трёхклеточных уголков можно из него гарантированно вырезать? (*Т. Караваева*)

**22**. Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что $\angle DAB=\angle CDA=60°$, а также $\angle DAC=\angle CDB$. Докажите, что $AB+CD=AD$. (*В. Произволов*)

**23**. Сумма положительных чисел $x$ и $y$ больше 1. Докажите неравенство $2(x^2+y^2)>x+y$. (*В. Сендеров*)

**24**. На основании $BC$ трапеции $ABCD$ взята точка $E$. Постройте на основании $AD$ такую точку $X$, для которой прямые $AD$ и $YZ$ параллельны, где $Y$ – точка пересечения $AE$ и $BX$, а $Z$ – точка пересечения $DE$ и $CX$. (*В. Сендеров*)

**25**. У Пети был прямоугольный коврик с целочисленными сторонами, причём длина была кратна ширине. Петя разрезал его на части и сшил их так, что снова получился прямоугольный коврик, причём длина увеличилась на простое число $p$, а ширина осталась целочисленной. Найдите длину нового коврика. (*Т. Караваева*)

**26**. Треугольными называются числа, которые можно представить в виде $\frac{n(n+1)}{2}$, где $n$ натуральное. Существуют ли такие **а**) треугольные числа; **б**) два треугольных числа, что

каждое из них больше $10^{100}$, а их сумма также является треугольным числом?
(*В. Произволов*, *В. Сендеров*)

**27**. Выписано несколько $n$-значных чисел, в записи которых используются только цифры 1 и 2, причём каждые два числа отличаются по крайней мере в 51% разрядов. Докажите, что выписано не более 51 числа. (*А. Шень*)

**28**. К гипотенузе $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$ проведена высота $CH$. Точки $I$, $I_1$, $I_2$ – центры вписанных окружностей треугольников $ABC$, $ACH$, $BCH$ соответственно. Докажите, что отрезки $CI$ и $I_1I_2$ равны и перпендикулярны. (*А. Хачатурян*)

## Первый тур

**29**. **а**) Решая задачу, Гриша нашёл два двузначных числа. Для каждого из этих чисел Саша вычислил сумму цифр, а Петя – произведение цифр. Могло ли произведение результатов Саши совпасть с суммой чисел, полученных Петей?

**б**) Та же задача для десяти двузначных чисел.

**в**) Существует ли десять таких различных натуральных чисел, что произведение сумм цифр этих чисел равно сумме произведений их цифр?

**г**) Для каких натуральных $n$ существует $n$ таких различных натуральных чисел, что произведение сумм цифр этих чисел равно сумме произведений их цифр? (*И. Акулич*)

**30**. Берендей и Снегурочка играют в следующую игру. Они по очереди стирают буквы в названии «БЕРЕНДЕЕВЫ ПОЛЯНЫ», начинает Снегурочка. За один ход стирается либо одна буква, либо одна буква и все такие же буквы. Выигрывает тот, кто сотрёт последнюю букву. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*И. Акулич*)

**31**. На шахматной доске расставлено несколько ладей. Разрешается поставить на свободную клетку дополнительную ладью, если она бьёт не менее **а**) двух; **б**) трёх имеющихся на доске ладей. Какое наименьшее число ладей надо расставить первоначально, чтобы по указанным правилам можно было заполнить ладьями всю доску?
(*И. Акулич*)

**32**. На пяти островах завтракали 30 аистов. На каждом острове аисты поделили лягушек поровну, причём каждый аист с первого острова съел больше, чем каждый аист со второго, со второго – больше, чем с третьего, и так далее. Сколько лягушек могло быть съедено на каждом из островов, если всего было съедено 42 лягушки и каждый аист съел хотя бы одну лягушку?

**33**. Одновременно были зажжены две свечи одинаковой длины: одна потолще, сгорающая за 4 часа, другая потоньше, сгорающая за 2 часа. Через некоторое время обе свечи были потушены. Оказалось, что огарок толстой свечи в 3 раза длиннее огарка тонкой свечи. Сколько времени горели свечи?

**34**. Барон Мюнхгаузен рассказывал, что он побывал на острове Невезения, имеющем форму многоугольника, у которого шесть идущих подряд углов острые. Можно ли утверждать, что барон врёт?

**35**. Среди первых 99 натуральных чисел выбрано 50 чисел. Известно, что никакие два из них не дают в сумме ни 99, ни 100. Чему равна сумма выбранных чисел?

**36**. Вася пытается подобрать такое целое число $a$, что $a^2 =$ МЯУМЯУ, где М, Я, У – некоторые цифры и М$\neq 0$. Удастся ли ему это сделать? (*К. Лолита*)

**37**. **а**) Найдите все такие натуральные $x$, что $x^2 = \overline{\underbrace{y\dots y}_{n}\underbrace{z\dots z}_{n}}$, где $y$ и $z$ – ненулевые цифры, а $n > 1$.

**б**) Найдите все такие натуральные $x$, что $x^2 = \overline{yyzztt}$, где $y$, $z$, $t$ – некоторые цифры и $y \neq 0$.
(*В. Сендеров*)

**38**. Продавец расположил набор из 100 гирек массами 1 г, 2 г, …, 100 г в произвольном порядке: $m_1$, $m_2$, …, $m_{100}$. Докажите, что гирьки массами $|m_1 - 1|$, $|m_2 - 2|$, …, $|m_{100} - 100|$ граммов можно разложить на две чаши весов так, что весы окажутся в равновесии.

(*В. Произволов*)

**39**. **а**) В магазине продают гирлянды лампочек, соединённых по кругу. Имеются гирлянды с любым количеством лампочек от 25 до 100. Назовём связанными лампочки, между которыми находится ровно 11 лампочек. Лампочки можно зажигать по одной в произвольном порядке. Если при включении какой-либо лампочки обе связанные с ней уже горят, то одну из них (любую по желанию) требуется погасить. Если горит только одна из связанных с ней, то её нужно погасить. На гирлянде какой длины можно зажечь больше всего лампочек, если первоначально все погашены?

**б**) В магазине продают гирлянды из $n > 2$ лампочек, соединённых по кругу. Лампочки можно зажигать по одной в произвольном порядке. Если при включении какой-либо лампочки обе соседние с ней уже горят, то одну из них (любую по желанию) требуется погасить. Если горит только одна соседняя, то её нужно погасить. Какое наибольшее количество лампочек можно зажечь на одной гирлянде, если первоначально все погашены?

(*А. Малеев*)

**40**. **а**) Можно ли разрезать заданный треугольник на два треугольника так, чтобы в них нашлось по равной стороне, причём эти стороны не лежали бы на одной прямой?

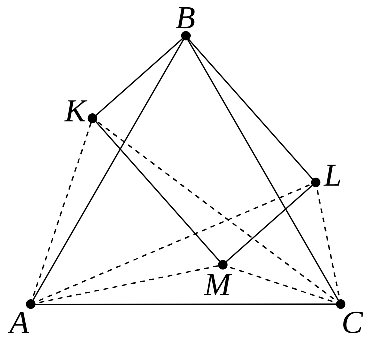
**б**) Разрежьте заданный треугольник на три треугольника так, чтобы в них нашлось по равной стороне, причём никакие две из этих трёх сторон не лежали бы на одной прямой.

**в**) Можно ли с помощью циркуля и линейки разбить произвольный треугольник на четыре треугольника так, чтобы в них нашлось по равной стороне, причём никакие две из этих четырёх сторон не лежали бы на одной прямой и не были бы параллельны друг другу?

(*А. Шаповалов, В. Сендеров, Б. Френкин*)

**41**. Треугольник $ABC$ равносторонний. Точки $K$, $L$, $M$ расположены так, что треугольники $ABK$, $BCL$, $ACM$, $ALM$, $KCM$ равны (см. рисунок). Докажите, что $BLMK$ – прямоугольник.

(*Д. Калинин*)




**42**. Для любых положительных чисел $a$, $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ ($n > 1$) докажите неравенство $\dfrac{x_1}{a + x_1} + \dfrac{x_2}{a + x_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a + x_n} > \dfrac{S}{a + S}$, где $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

(*В. Сендеров*)

**43**. В строку выписывается последовательность натуральных чисел. Каждый член последовательности, начиная со второго, вычисляется по следующему правилу:

1) если в предыдущем числе нет одинаковых цифр, то к нему прибавляется количество его цифр;

2) если в предыдущем числе есть одинаковые цифры, то из него вычитается двойка.

Докажите, что, начиная с определённого места последовательности, числа станут периодически повторяться.

(*А. Жуков*)

**44**. Через точку $O$ внутри квадрата $ABCD$ провели прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые пересекли стороны $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ в точках $X$, $Y$, $Z$, $T$ соответственно. Известно, что $YD$ – биссектриса угла $XYC$. Докажите, что площадь прямоугольника $XBYO$ в 2 раза больше площади прямоугольника $TOZD$.

(*Д. Калинин*)

**45**. В окружности проведены две равные хорды $AB$ и $AC$, угол между которыми равен 30°. Квадрат расположен так, что одна его вершина находится на меньшей дуге $AB$, другая – на меньшей дуге $BC$, а две оставшиеся – по одной на хордах. Докажите, что сторона квадрата равна радиусу окружности.

(*М. Волчкевич*)

## Второй тур

**46**. В двух ящиках лежат перчатки трёх цветов: в левом ящике – 17 белых, четыре синих и четыре красных (все на левую руку), в правом – 13 белых, восемь синих и восемь красных (все на правую руку). Какое наименьшее количество перчаток надо вытащить одновременно и не глядя, чтобы среди них обязательно нашлась пара перчаток одного цвета на разные руки?

**47**. Из шахматной доски вырезали клетчатую связную фигуру, в которой белых клеток не меньше, чем чёрных. Всегда ли на этой фигуре можно разместить столько не перекрывающихся двухклеточных доминошек, сколько в ней чёрных клеток? (*А. Гусаков*)

**48**. **а**) В государстве несколько городов. Из каждого города выходит хотя бы одна дорога, и между каждыми двумя городами может быть не более одной дороги. Сколько городов может быть в государстве, если всего в нём семь дорог? (*И. Раскина*)

**б**) Та же задача, но общее число дорог равно 100. (*А. Скопенков*)

**49**. У Ксюши было 80 рублей, а у Наташи – 64 рубля. Каждая из девочек купила как можно больше шоколадок «Алёнка». Ксюша получила 8 рублей сдачи, а Наташа – 10 рублей. Смогут ли девочки, сложившись, купить ещё одну шоколадку?

**50**. Берендей и Снегурочка играют на бесконечной клетчатой полоске ширины 1. Снегурочка своим ходом ставит два крестика в любые две свободные клетки. Берендей стирает любое количество идущих подряд крестиков, между которыми нет свободных клеток. Ходят по очереди, начинает Снегурочка. Может ли Снегурочка в какой-то момент получить 2005 идущих подряд крестиков?

**51**. На первом этаже большого дома у лифта встретились пятеро друзей. Женя сказал: «Если считать отсюда, то я живу выше Вовы в 2 раза, выше Пети в 3 раза, выше Андрея в 4 раза и выше Тани в 6 раз». «Ты это здорово подметил, – отозвался Андрей, – а ты, Петя, потише стучи своими гантелями у меня над головой». На каком этаже живёт Андрей?

**52**. Семь чисел записали по кругу. Затем для каждых двух соседних чисел вычислили их сумму и записали между ними, а первоначальные числа стёрли. Получилась цепочка из чисел 1, −5, 5, 22, 9, −1, 3. Можно ли восстановить исходные числа?

**53**. Из Москвы в «Берендеевы поляны» выехали автобусы с детьми. Когда они проехали 70 км, из Москвы вслед за ними выехал Григорий Вячеславович и догнал автобусы в Костроме. После этого автобусы проехали 40 км, а Григорий Вячеславович за то же время – 50 км. Найдите расстояние от Москвы до Костромы.

**54**. Гномы Сеня, Миша, Гриша, Дима и Вова соревновались в беге, а также в прыжках в длину и в высоту. Каждый раз на первом месте был гном в красной майке, на втором – в синей, на третьем – в зелёной (у каждого гнома только одна майка). Последнее место в беге занял гном Сеня, в прыжках в длину – гном Гриша, в прыжках в высоту – гном Вова. Могут ли у гномов Миши и Димы быть майки одного цвета? (*Т. Караваева*)

**55**. Грани кубика имеют такой же размер, как и клетки шахматной доски. Одна из граней окрашена. Кубик поставили на одну из клеток окрашенной гранью вниз и, перекатывая через ребро, прокатили по всей доске, побывав на каждой клетке ровно по одному разу. В итоге кубик снова оказался на исходной клетке окрашенной гранью вниз. Найдите наибольшее возможное количество клеток, на которых кубик мог стоять окрашенной гранью вниз. (*В. Гуровиц*)

**56**. Про два треугольника известно, что для каждого из них сумма длин любых двух его сторон равна сумме длин каких-нибудь двух сторон другого треугольника. Обязательно ли треугольники равны? (*Д. Вельтищев, М. Вельтищев*)

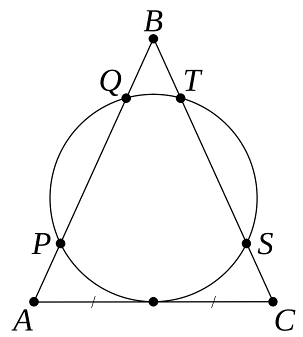
**57**. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 - 4x = y^2$. (*В. Сендеров*)

**58**. Сколько среди натуральных чисел от 1 до 1000 таких, у которых сумма всех делителей нечётна? (*А. Блинков*)

**59**. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 100. Два игрока по очереди стирают по одному числу, пока не останется два числа. Если их можно подставить вместо $p$ и $q$ в уравнение $x^2 + px + q = 0$ так, чтобы у этого уравнения были целые различные корни, то выигрывает второй игрок, иначе – первый. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Е. Куликов*)

**60**. Пусть $a$, $b$, $c$ – стороны треугольника, а $p$ – его полупериметр. Докажите неравенство $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} > p$. (*В. Сендеров*)

**61**. Окружность радиуса $r$ касается основания $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ в его середине и пересекает сторону $AB$ в точках $P$ и $Q$, а сторону $CB$ – в точках $S$ и $T$ (см. рисунок). Описанные окружности треугольников $PTB$ и $SQB$ повторно пересекаются в точке $X$. Найдите расстояние от точки $X$ до основания треугольника $ABC$. (*Д. Калинин*)




**62**. Существует ли такое натуральное $a$, что в последовательности $x_n = n^2 + 2005an + 2004a^2$ каждые два соседних члена взаимно просты? (*В. Сендеров*)

**63**. Точка $P$, расположенная внутри треугольника $ABC$, проецируется на стороны $BC$, $CA$, $AB$ в их внутренние точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно, а затем – в точки $A_2$, $B_2$, $C_2$ на отрезках $B_1C_1$, $C_1A_1$, $A_1B_1$ соответственно. Докажите, что $PA \cdot PA_1 \cdot PA_2 = PB \cdot PB_1 \cdot PB_2 = PC \cdot PC_1 \cdot PC_2$. (*А. Заславский*)

**64**. На первой горизонтали шахматной доски стоят восемь белых ладей, а на восьмой горизонтали – восемь чёрных ладей. За какое наименьшее число ходов белые ладьи могут поменяться местами с чёрными? Ходы белых и чёрных ладей не обязательно чередуются. (*С. Токарев*)

## Третий тур

**65**. На двух чашах весов лежат гирьки так, что весы показывают равновесие. Все эти гирьки разложили иначе по чашам, но так, что весы снова показали равновесие. В третий раз на каждую чашу поместили только те гирьки, которые оба раза уже были на ней. Будет ли на весах вновь равновесие? (*В. Произволов*)

**66**. Аня познакомилась с Борей раньше, чем с Витей и Гришей. Боря познакомился с Витей раньше, чем с Аней и Гришей. Витя познакомился с Гришей раньше, чем с Аней и Борей. А с кем раньше познакомился Гриша: с Аней, Борей или Витей? (*В. Гуровиц*)

**67**. Если к году, в котором была придумана эта задача, прибавить сумму цифр, используемых для записи этого года, получится 2010. В каком году была придумана задача?

**68**. Среди восьми человек имеется один фальшивомонетчик. Каждый знает, кто фальшивомонетчик, но стесняется назвать его. Инспектор Варнике может выделить любую группу среди этих восьми человек, состоящую более чем из одного человека, и задать вопрос: «Имеется ли среди вас фальшивомонетчик?» На этот вопрос все отвечают правду. За какое наименьшее количество вопросов инспектор может гарантированно определить фальшивомонетчика? (*А. Жуков*)

**69**. Рубик хочет распилить свой кубик на уголки из трёх маленьких кубиков. Есть ли способ это сделать?

**70**. Вместо матбоя две команды и жюри решили сыграть в следующую игру. В кучке лежит 451 спичка. Каждая из команд имеет право брать одну или две спички, а жюри – одну, две или три спички. При этом команды объединяют свои усилия против жюри. Ходят по очереди, но жюри имеет право выбрать, когда им делать первый ход: первыми, вторыми или третьими. Выигрывает тот, кто возьмёт последнюю спичку. Кто может гарантировать себе победу: команды или жюри?

**71**. В каждой вершине куба записано натуральное число, на каждом ребре – сумма чисел, записанных в его концах, а на каждой грани – сумма чисел, записанных в вершинах этой грани. Может ли сумма всех 26 чисел равняться 2005?

**72**. В забеге по коридору общежития участвуют 44 весёлых таракана. Они стартовали одновременно от одной стены. Добежав до противоположной стены, таракан сразу поворачивает обратно. Первый таракан бежит не очень быстро, второй – вдвое быстрее, третий – вдвое быстрее второго и так далее. Могут ли все тараканы встретиться в точке, отличной от точки старта?

**73**. В треугольнике $ABC$ сторона $AB$ равна 1. Известно, что одна из биссектрис треугольника перпендикулярна одной из его медиан, а некоторая другая биссектриса перпендикулярна другой медиане. Чему может быть равен периметр треугольника $ABC$?
(*А. Акопян, Ю. Блинков, Е. Горская*)

**74**. Вершины квадрата пронумеровали и внутри него отметили девять точек, не лежащих на диагоналях и отрезках, соединяющих середины противоположных сторон. Рядом с каждой из них написали номера вершин квадрата в порядке близости к данной точке. Верно ли, что рядом с какими-то двумя точками номера написаны в одном и том же порядке? (*Д. Калинин*)

**75**. Взаимно простые натуральные числа $x$, $y$, $z$ удовлетворяют равенству $x^2 + y^2 = z^4$. Докажите, что число $xy$ делится **а**) на 8; **б**) на 7. (*В. Сендеров*)

**76**. В лифте 100-этажного дома всего одна кнопка, при нажатии на которую он либо поднимается на 79 этажей вверх, либо опускается на 21 этаж вниз (каждый раз выбирается единственное из возможных направлений). Лифт отправляется с первого этажа. Сколько раз надо нажать на кнопку, чтобы лифт вернулся на первый этаж? (*А. Спивак*)

**77**. **а**) В государстве 80 городов, один из которых является столицей. Некоторые пары городов соединены дорогами. Из каждого города выходит либо одна, либо три дороги. Известно, что из каждого города можно попасть по дорогам в столицу ровно одним способом. Назовём город захолустным, если из него выходит одна дорога. Для каждого захолустного города подсчитали количество дорог в пути, соединяющем этот город со столицей. Найдите наибольшее возможное значение суммы всех подсчитанных чисел.

**б**) Докажите, что если в условиях пункта а) из каждого города может выходить любое количество дорог, то сумма всех подсчитанных чисел меньше 2005. (*А. Скопенков*)

**78**. **а**) В противоположных угловых клетках шахматной доски записаны числа 1 и 15. Докажите, что в остальных клетках можно расставить числа так, чтобы каждое число, кроме тех двух, которые были на доске первоначально, равнялось полусумме своих наибольшего и наименьшего соседей, причём это можно сделать единственным способом. Числа считаются соседями, если находятся в клетках с общей стороной.

**б**) Докажите то же утверждение, если первоначально в двух клетках доски записаны числа 1 и 13, как показано на рисунке. (*В. Гуровиц*)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 13 | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | |

**79**. В треугольнике есть сторона, длина которой больше 1. Всегда ли его можно разрезать на несколько треугольников, в каждом из которых есть сторона длины 1? (*А. Шаповалов*)

**80**. Три окружности проходят через точку $X$. Пусть $A$, $B$, $C$ – точки их пересечения, отличные от $X$, $A'$ – вторая точка пересечения прямой $AX$ и окружности $BCX$, точки $B'$ и $C'$

определяются аналогично. Докажите, что треугольники $ABC'$, $AB'C$ и $A'BC$ подобны.
(*А. Заславский*)

**81**. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ прямые, симметричные диагонали $AC$ относительно биссектрис углов $A$ и $C$, пересекаются в точке $P$, расположенной внутри четырёхугольника. Докажите, что проекции точки $P$ на стороны четырёхугольника $ABCD$ или их продолжения являются вершинами равнобедренной трапеции или прямоугольника.
(*А. Заславский*)

**82**. Докажите, что существуют натуральные числа $m$ и $n$, для которых выполняется неравенство $\left|\frac{m^2}{n^3}-\sqrt{2015}\right|<\frac{1}{10^9}$. (*В. Берник*)

**83**. Алхимик хранит эликсир в четырёх одинаковых сосудах. Можно сливать содержимое двух сосудов в один (сосуд может вместить весь эликсир) или поставить два сосуда на чашечные весы и лить из третьего в тот, где эликсира меньше, пока весы не уравновесятся или эликсир в третьем сосуде не закончится. Алхимик помнит, что так можно получить сосуд ровно с одной унцией эликсира, но не помнит, как именно. Первоначально один из сосудов пуст, а в каждом из остальных целое число унций эликсира. Докажите, что с помощью разрешённых операций можно восстановить исходные количества в каждом сосуде и при этом узнать, где сколько эликсира.
(*А. Шаповалов*)

**84**. Улицы города проходят либо с севера на юг, либо с запада на восток. С одного перекрёстка выехали три велосипедиста: на север, на восток и на юг. Во время движения никто из них не проезжал дважды по одному и тому же кварталу. Через некоторое время они встретились на другом перекрёстке, причём каждый въехал на него в том же направлении, в каком он выехал с первого перекрёстка. Докажите, что траектории каких-то двух велосипедистов пересеклись. (*Б. Френкин*)

**85**. Треугольник вписан в окружность. Через точку пересечения его медиан проведена произвольная хорда. Докажите, что сумма квадратов расстояний от её концов до всех вершин треугольника в 3 раза больше квадрата длины самой хорды. (*М. Волчкевич*)

**86**. Имеется 400 положительных чисел, каждое из которых меньше суммы любых восьми других. Докажите, что среди них можно выбрать пять чисел, четвёртая степень каждого из которых меньше суммы четвёртых степеней любых двух других. (*И. Акулич*)

## Финал

**87**. Вписанная окружность прямоугольного треугольника $ABC$ с прямым углом $A$ касается сторон $AB$ и $BC$ в точках $P$ и $Q$ соответственно.

**а**) Прямая $PQ$ пересекает продолжение стороны $AC$ в точке $R$. Докажите, что $AR = BQ$.

**б**) Вневписанная окружность, касающаяся стороны $AB$ и продолжений сторон $AC$ и $BC$, касается прямой $AC$ в точке $R$. Докажите, что точки $P$, $Q$ и $R$ лежат на одной прямой.
(*А. Акопян*)

**88**. В равнобедренном треугольнике $ABC$ угол $B$ равен 120°. На стороне $AC$ отмечена такая точка $M$, что $AM : MC = 1 : 2$. Найдите угол $MBC$. (*А. Хачатурян*)

**89**. Даны числа $a$ и $b$. Известно, что среди чисел $a + b$, $a - b$, $ab$ и $\frac{a}{b}$ три числа равны, а четвёртое отлично от них. Найдите все возможные значения $a$ и $b$. (*Б. Френкин*)

**90**. Двое играют в следующую игру. Первый пишет на доске (если она пуста) или дописывает справа к написанному числу одну из цифр 1, 2 или 3. Второй может приписать в любом месте или вычеркнуть в любом месте два одинаковых стоящих рядом однозначных или двузначных числа. Вначале доска пуста. Может ли первый добиться того, что на доске появится не менее чем 2005-значное число? (*И. Иванов*)

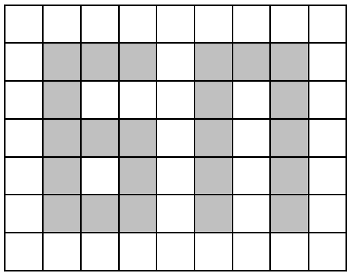
**91**. Докажите, что в вершинах любого конечного графа можно расставить натуральные числа так, чтобы наименьшее общее кратное каждой пары чисел в вершинах, соединённых ребром, было равно одному и тому же числу, а наименьшее общее кратное чисел в каждой паре вершин, не соединённых ребром, от этого числа отличалось. (*А. Шаповалов*)

**92**. Докажите, что для любого натурального $n \geq 10$ все натуральные числа от 1 до $n$ можно разбить на две группы так, чтобы произведение чисел в одной из групп отличалось от произведения чисел в другой группе не более чем на 3% (проценты берутся от меньшего числа). (*И. Акулич*)

**93**. Каждая клетка шахматной доски окрашена в какой-то цвет, при этом в каждой горизонтали и в каждой вертикали есть клетки не более чем двух цветов. Какое наибольшее количество различных цветов могло быть использовано? (*Д. Калинин*)

**94**. Обозначим через $S(n)$ сумму всех делителей натурального числа $n$. Для каких $n$ выполняется равенство $S(2n) = 3S(n)$? (*А. Блинков*)

**95**. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка $P$ так, что $\angle ABP = \angle ADP$. Докажите, что $\angle APB + \angle CPD = 180°$. (*В. Произволов*)



**96**. Когда-то давным-давно при въезде в «Берендеевы поляны» стоял щит, изображённый на рисунке. Постройте прямую так, чтобы она разделила каждую из букв Б и П на две части равной площади (часть – это то, что лежит по одну сторону от прямой).

**97**. Положительные числа $x$, $y$, $z$ таковы, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Докажите неравенство $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} + \frac{y+z}{y^2+yz+z^2} + \frac{z+x}{z^2+zx+x^2} \leq \frac{2}{3}$. (*Д. Калинин*)

**98**. Два игрока по очереди закрашивают клетки доски $2005 \times 2005$. Клетку нельзя закрашивать, если в её горизонтали или вертикали уже есть две закрашенные клетки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*С. Спиридонов*)

**99**. Докажите, что уравнение $x^2 + y^3 = z^4$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах. (*В. Лецко*)

**100**. На плоскости дано 1000 красных и 1000 синих точек. Расстояние между каждыми точками разного цвета не превосходит 1. Докажите, что либо все красные, либо все синие точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (*А. Акопян, В. Дольников*)

**101**. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, произведение каждых 100 членов которой делится на их сумму? (*И. Акулич, В. Сендеров*)

*Источник*: http://tursavin.ru