IX турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
25 июня - 1 июля 2003 года

Личная олимпиада

1. В записи десятизначного числа были использованы все десять цифр. Вместо каждой цифры написали количество цифр, которые меньше неё и расположены справа от неё. Получили число **а**) 3333222110; **б**) 4333222110; **в**) 1234543210. Каким было первоначальное число? (*В. Произволов*)

2. Дон Кихот одержал победу над десятью ветряными мельницами. Некоторым он отрубил по два крыла, некоторым – три, а остальным – все четыре. Первые три мельницы в сумме потеряли в полтора раза меньше крыльев, чем остальные семь. Мельниц, ставших однокрылыми, больше, чем мельниц, ставших двукрылыми. Сколько мельниц лишилось всех четырёх крыльев? (*И. Акулич*)

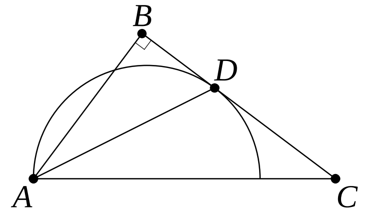
3. В начале игры есть **а**) 100 одинаковых квадратов; **б**) 100 прямоугольников 1×2. Два игрока ходят по очереди, каждым ходом можно выбрать два прямоугольника с равной стороной и склеить их по этой стороне в один больший прямоугольник. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

4. Кот может съесть связку сосисок за 37 минут, а пёс – за 23 минуты. Они начали есть с двух концов и когда съели все сосиски, подсчитали, сколько процентов от всей связки досталось каждому. Оказалось, что коту досталось на 10% больше, чем псу. Кто из них начал есть раньше и на сколько минут?

5. В турнире по игре в крестики-нолики, проведённом по системе «проиграл – выбыл», участвовали 18 школьников. Каждый день игралась одна партия, участников которой выбирали жребием из ещё не выбывших школьников. Шестеро школьников утверждают, что участвовали в четырёх партиях каждый. Могут ли они все быть правы?

6. Нарисуйте на плоскости несколько точек, более половины из них покрасьте и соедините некоторые из них непересекающимися отрезками так, чтобы из каждой точки выходило не менее трёх отрезков, но никакие две окрашенные точки не были соединены отрезком. (*А. Спивак*)

7. Полукруг касается катета BC прямоугольного треугольника ABC в точке D (см. рисунок). Докажите, что AD – биссектриса угла BAC. (*В. Произволов*)



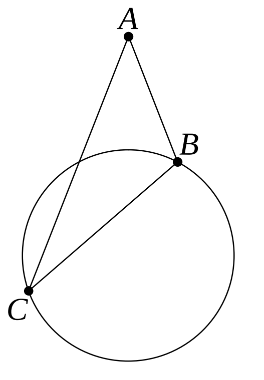
8. Имеется 200 гирек массами 1 г, 2 г, …, 200 г. Их разложили по 100 штук на две чаши весов. Назовём значимостью гирьки число гирек с другой чаши, которые легче неё. Докажите, что весы покажут равновесие тогда и только тогда, когда суммарная значимость гирек на левой чаше равна суммарной значимости гирек на правой чаше. (*В. Произволов*)

9. При каких натуральных n число n^2-1 является степенью простого числа? (*В. Сендеров*)

10. Добрая фея просматривает оценки Пети слева направо и, если находит идущие подряд двойку и тройку (или тройку и двойку), тут же превращает их в пятёрку. Докажите, что если бы фея просматривала оценки справа налево, то пятёрок у Пети получилось бы столько же. (*А. Чеботарёв*)

11. Для положительных чисел x и y, меньших единицы, докажите неравенство $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\le\frac{2}{1+xy}$. (*В. Сендеров*)

12. На чертеже изображён неравнобедренный треугольник ABC и окружность, проходящая через точки B, C и центр I вписанной окружности треугольника ABC (центры окружностей на чертеже не отмечены). Постройте точку I с помощью одной линейки.



13. Квадрат разрезан на равные треугольники. Обязательно ли у каждых двух треугольников найдётся пара параллельных сторон? (*А. Шаповалов*)

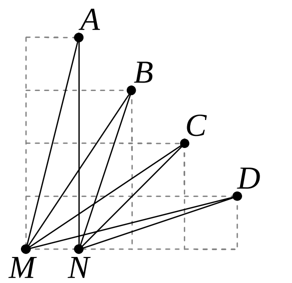
14. Зафиксирована окружность ω и точка M внутри неё. Для каждой окружности, равной ω и проходящей через M, опустили перпендикуляр MH из точки M на общую хорду двух окружностей. Найдите геометрическое место точек H.

Командная олимпиада

15. Можно ли представить число 110 в виде суммы натуральных (не обязательно различных) слагаемых, сумма обратных величин которых равна 1? (*А. Шаповалов*)

16. На некоторых клетках шахматной доски сидело по лягушке. Поссорившись с соседями, в некоторый момент все они одновременно перепрыгнули на соседние клетки (соседними считаются клетки, имеющие по крайней мере одну общую вершину). При этом на каждой клетке вновь оказалось не более одной лягушки, но все бывшие соседи перестали ими быть. Какое наибольшее количество лягушек могло сидеть на доске? (*И. Акулич*)

17. На клетчатой бумаге нарисованы углы MAN, MBN, MCN, MDN, как показано на рисунке. Найдите их сумму. (*В. Произволов*)



18. На шахматной доске расставлено несколько белых и чёрных ладей так, что каждая из них бьёт больше белых ладей, чем чёрных. Может ли чёрных ладей быть больше, чем белых? (*А. Шаповалов*)

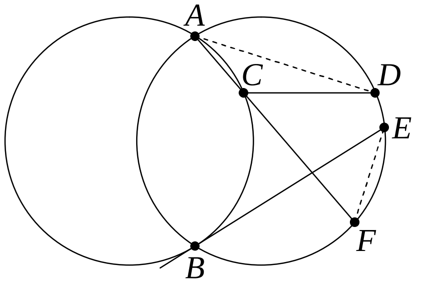
19. Если к пятёрке приписать слева двойку, получится точный квадрат: $25=5^2$. Если приписать ещё одну двойку, снова получится точный квадрат: $225=15^2$. Будут ли ещё появляться квадраты, если слева продолжать приписывать двойки? (*А. Зайчик*)

20. На съезд партии умеренного прогресса собралось 100 делегатов, каждый из которых либо всегда говорит правду, либо всегда врёт. Первое же заседание по одному покинули 60 делегатов. Выходя из зала, каждый заявил журналистам: «Среди оставшихся там делегатов лжецов больше, чем правдивых». Сколько всего лжецов среди делегатов съезда? (*И. Акулич*)

21. Шагреневая кожа исполняет желания, но после каждого желания её площадь уменьшается либо на 1 квадратный дециметр в обычном случае, либо вдвое, если желание заветное. Десять желаний уменьшили площадь кожи втрое, следующие несколько – ещё всемеро, а ещё через несколько желаний кожа вообще пропала. Какова была первоначальная площадь кожи? (*И. Акулич*)

22. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. На продолжении стороны BA за точку A отметили точку E так, что $AE=BC$. Оказалось, что $\angle ADE=\angle ADB$ и $\angle BED=\angle DBC$. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника делит AC пополам. (*С. Берлов*)

23. Две равные окружности пересекаются в точках A и B. На первой окружности отмечена точка C, а на второй – точка D так, что отрезок CD параллелен линии центров окружностей (см. рисунок). Касательная к первой окружности, проведённая через точку B, и прямая AC пересекают вторую окружность в точках E и F соответственно. Докажите, что прямые AD и EF перпендикулярны. (*Д. Калинин*)



Первый тур

24. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ образует со стороной BC и высотой DH углы по 40°. Найдите углы параллелограмма. (*И. Григорьева*)

25. На всех клетках шахматной доски, кроме восьми клеток одной из главных диагоналей, расставлено по шашке. Петя и Коля играют, делая ходы по очереди. Петя каждым своим ходом снимает с доски не более 14 шашек, а Коля выбирает любую клетку диагонали, которая была первоначально пустая, и ставит шашки на все свободные клетки, находящиеся с ней в одной горизонтали или в одной вертикали (но на диагональ шашки не ставятся). Может ли Петя добиться, чтобы после его очередного хода на доске осталось не более трёх шашек? (*И. Акулич*)

26. Три математика ехали в разных вагонах одного поезда. Когда поезд подъезжал к станции, математики насчитали на перроне 7, 12 и 15 скамеек. А когда поезд отъезжал, один математик насчитал в 3 раза больше скамеек, чем другой. Сколько скамеек насчитал третий? (*А. Чеботарёв*)

27. Однажды была найдена обложка олимпиадной работы (см. таблицу), которую проверяли Иванов, Петров и Сидоров (неизвестно, в каком порядке). Иванов всегда правильно проверяет геометрические задачи, Петров, если и ошибается, то только в геометрии, а Сидоров всё проверяет правильно, но часто ставит оценки не в те колонки. Формулировки задач не сохранились. Можно ли восстановить правильные оценки? (*А. Чеботарёв*)

0	+	+	±
+	+/2	−	∓
∓	−	±	+/2

28. Докажите, что если сумма целых чисел a, b, c не делится на 3, то значение выражения $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ делится на 9. (*Д. Калинин*)

29. Все натуральные числа от 1 до 10^{1024} записали подряд в одну строчку. Затем стёрли все цифры 0 и 1. К оставшимся цифрам взяли обратные величины и все их сложили. Чему равна дробная часть полученной суммы? (*Г. Гальперин*)

30. Придумайте такие целые попарно взаимно простые числа x, y, z, t, не равные нулю, что $(x+y+z)(y+z+t)(z+t+x)(t+x+y)=xyzt$. (*В. Сендеров*)

31. В выпуклом шестиугольнике сумма трёх идущих подряд углов равна сумме трёх остальных углов. Докажите, что две противоположные стороны шестиугольника параллельны.

32. В однокруговом турнире матбоёв участвовали n команд. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Оказалось, что каждые три команды в играх между собой набрали разное число очков. Какое наибольшее количество ничьих могло быть в этом турнире? (*И. Воронович*)

33. **а**) В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, CA, AB соответственно. Прямые A_1C_1 и BB_1 пересекаются в точке M. Пусть H – основание высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B, а N – точка пересечения прямых A_1H и B_1C_1. Докажите, что прямые BH и MN параллельны.

б) Докажите то же утверждение, если H – произвольная точка на стороне CA.

(*А. Жуков*)

34. На полуокружности с диаметром PQ взяты точки A и B, отличные от точек P и Q. Точка C диаметра PQ такова, что треугольник ABC имеет наименьший периметр из всех возможных. Прямые AQ и BP пересекаются в точке R. Докажите, что середины отрезков PR и QR лежат на описанной окружности треугольника ABC. (*Д. Калинин*)

35. Числа натурального ряда расставляются по диагоналям прямоугольной таблицы, как показано на рисунке. Число 2^{2003} располагается на пересечении m-й строки и n-го столбца таблицы. Найдите $n-m$. (*А. Жуков*)

1	2	4	7	11
3	5	8	…	
6	9			
10				

Второй тур

36. В мастерской изготавливают прямоугольные решётки, состоящие из квадратных ячеек со стороной 1. Для этого используют заготовки из двух стержней длины 1, сваренных в концах под прямым углом. При изготовлении решётки запрещается накладывать стержни друг на друга, допускается лишь сваривать их между собой в точках касания. Для каких m и n мастерская может изготовить решётку размером $m \times n$?

(*И. Акулич*)

37. Восьмого марта каждая из n учительниц пришла в школу с одним цветком. При этом оказалось, что все цветы разные. Каждая учительница может подарить любой другой учительнице все или часть имеющихся у неё цветов. Нельзя дарить букет, если в точности такой же букет в этот день уже кому-то дарили. Какое наибольшее количество букетов может быть подарено? Один цветок – это тоже букет. (*А. Чеботарёв*)

38. Головку сыра массой 10 кг разрезали на 17 кусков. При этом получились куски только двух различных масс. Всегда ли можно разрезать некоторые из них (но не все) так, чтобы среди полученных кусков по-прежнему встречались куски не более чем двух различных масс и при этом их можно было разложить на две кучки по 5 кг?

(*А. Шаповалов*)

39. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = y+z+t, \\ \dfrac{1}{y} = z+t+x, \\ \dfrac{1}{z} = t+x+y, \\ \dfrac{1}{t} = x+y+z; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} = x_2+x_3+\ldots+x_{10}, \\ \dfrac{1}{x_2} = x_3+x_4+\ldots+x_1, \\ \ldots \\ \dfrac{1}{x_{10}} = x_1+x_2+\ldots+x_9; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} = x_2+x_3+\ldots+x_n, \\ \dfrac{1}{x_2} = x_3+x_4+\ldots+x_1, \\ \ldots \\ \dfrac{1}{x_n} = x_1+x_2+\ldots+x_{n-1} \end{cases}$ при $n>2$.

(*Е. Барабанов, И. Воронович*)

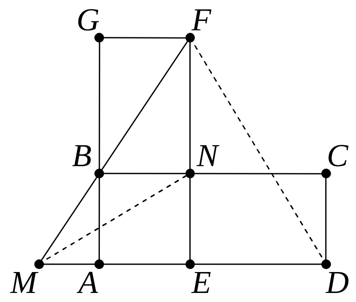
40. В ряд лежат 100 штабелей бетонных плит: в крайнем слева – одна плита, во втором – две, …, в 100-м штабеле – 100 плит. Строителю дано задание перераспределить плиты по штабелям, двигая их влево. Сил поднять плиту у него нет, поэтому он может передвинуть плиту в соседний слева штабель, только если там плит меньше. Как могут быть распределены плиты в штабелях, когда ни одну из них уже нельзя будет сдвинуть?

(*Д. Калинин, А. Чернятьев*)

41. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяли соответственно такие точки M и N, что $AC = CM$ и $MN = NB$. Высота треугольника ABC, проведённая из вершины B, пересекает отрезок CM в точке K. Докажите, что NK – биссектриса угла MNC. (*Д. Калинин*)

42. Через вершины B и F двух равных прямоугольников $ABCD$ и $AEFG$, расположенных, как показано на рисунке, провели прямую, которая пересекла прямую AD в точке M. Докажите, что прямые DF и MN перпендикулярны.

(*Д. Калинин*)



43. **а**) Целые числа x, y, z, t удовлетворяют равенству $x^2+y^2+z^2+t^2=1000$. Докажите, что все числа x, y, z, t чётны.

б) Целые числа x, y, z, t удовлетворяют равенству $x^2+y^2+z^2+t^2=1000000$. Докажите, что x не равно 1.

в) Докажите, что если в условиях пункта б) числа x, y, z, t больше 100, то все они больше 101. (*В. Сендеров*)

44. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\frac{x^2}{2x+y+z}+\frac{y^2}{x+2y+z}+\frac{z^2}{x+y+2z}\geq\frac{yz}{2x+y+z}+\frac{zx}{x+2y+z}+\frac{xy}{x+y+2z}.$$ (*Д. Калинин*)

45. Однокруговой турнир, в котором участвуют 13 шахматистов, должен пройти в течение трёх дней. Составьте турнирное расписание так, чтобы в каждый из дней для каждых двух шахматистов, не играющих в этот день между собой, существовал шахматист, играющий в этот день с обоими. (*С. Токарев*)

Третий тур

46. **а**) Докажите, что если для натуральных чисел x, y, z выполнено равенство $(2^x-1)(2^y+1)=2^z-1$, то $x=y$.

б) Решите в натуральных числах уравнение $(2^x+1)(2^y+1)=2^z+1$. (*В. Сендеров*)

47. Среди n рыцарей каждые двое – либо друзья, либо враги. У каждого рыцаря ровно три врага, причём враги его друзей являются его врагами. При каких n такое возможно?

(*Е. Барабанов, И. Воронович*)

48. У Васи есть сверхточная бензопила, которая умеет распиливать брёвна в отношении $x:(1-x)$ или $y:(1-y)$ и ни в каком другом. Вася распилил бревно на две части. Одну из них он снова распилил на две части. Затем он распилил одну из имеющихся трёх частей. Оказалось, что среди полученных четырёх брёвен ровно три имеют одинаковую длину. Определите возможные значения x и y. (*А. Чеботарёв*)

49. В куче лежат n камней. Два игрока по очереди берут из неё камни. За один ход можно взять один или два камня. Чтобы выиграть, игроку нужно взять последний камень и, кроме того, набрать в сумме не меньше камней, чем соперник. При каких n один из игроков может обеспечить себе победу при любой игре соперника?

(*Е. Барабанов, И. Воронович*)

50. С помощью циркуля и линейки разделите произвольный треугольник на три треугольника, в каждом из которых можно выбрать по медиане так, чтобы длины выбранных медиан были равны. (*А. Шаповалов*)

51. В строку выписано 20 крестиков и 20 ноликов в произвольном порядке. За один ход можно поменять местами любые два соседних знака. За какое наименьшее число ходов можно гарантированно добиться, чтобы некоторые 20 стоящих подряд знаков оказались крестиками? (*И. Акулич*)

52. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy=z^2+z, \\ yz=x^2-x, \\ zx=y^2+y. \end{cases}$

53. На каждой стороне треугольника ABC отмечено по две точки, которые делят соответствующую сторону на три равные части. Из точек, смежных с вершиной A, восстановлены перпендикуляры к сторонам, на которых они лежат, и через X обозначена точка их пересечения. Аналогично для точек, смежных с вершиной B, строится точка Y, а для точек, смежных с вершиной C, – точка Z. Найдите радиус описанной окружности треугольника XYZ, если радиус описанной окружности треугольника ABC равен R.

54. Король, которому запрещено ходить по диагонали, сделал несколько ходов на шахматной доске (посетив, возможно, некоторые клетки неоднократно). При этом он побывал на всех белых клетках. Каково наименьшее возможное число чёрных клеток, на которых он побывал? (*И. Акулич*)

55. Могут ли три различных числа вида $2^n + 1$, где **а**) n – натуральные числа; **б**) n – целые числа, быть последовательными членами геометрической прогрессии? (*В. Сендеров*)

56. Имеется два равных равносторонних треугольника, дающих в пересечении шестиугольник. Вне шестиугольника образуется шесть треугольников, которые занумерованы по часовой стрелке. Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_6$ – радиусы описанных окружностей этих треугольников. Докажите, что $R_1 + R_3 + R_5 = R_2 + R_4 + R_6$. (*В. Произволов*)

57. Пусть O_a – центр квадрата $KLMN$, вписанного в треугольник ABC так, что точки K и N лежат на стороне BC, L – на стороне AB, M – на стороне AC. Точки O_b и O_c определяются аналогично. Докажите, что прямые AO_a, BO_b, CO_c пересекаются в одной точке.

58. Последовательность неотрицательных чисел задана условиями $a_1 = a_{2003} = 2003$, $a_{n+2} = a_{n+1}^2 - a_n^2 + a_n$ при всех $n \geq 1$. Найдите a_{1000}.

Финал

59. В Буранде нечётное число городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, общее число дорог нечётно. Известно, что из каждого города можно доехать в любой другой (возможно, через другие города). Докажите, что можно ввести на всех дорогах одностороннее движение так, чтобы из каждого города выходило нечётное число дорог. (*М. Вялый*)

60. Вырежьте из листа клетчатой бумаги связную фигуру, которую можно разрезать на двухклеточные прямоугольники ровно **а**) 25 способами; **б**) 60 способами. (*А. Шаповалов*)

в) Докажите, что для любого натурального n существует клетчатая фигура, которую можно разрезать на двухклеточные прямоугольники ровно n способами. (*А. Чеботарёв*)

61. Сборные Угунди и Буранды, в каждой из которых по 12 борцов, намерены провести соревнование по борьбе. У всех борцов разные силы, и в каждом поединке более сильный борец всегда побеждает более слабого. Для каждого тура образуется 12 пар (угундиец против бурандийца), счёт в туре – по числу побед в этих парах. Организаторам известны сравнительные силы борцов внутри каждой команды, но не между борцами из разных стран. Они собираются проводить соревнование до тех пор, пока какой-нибудь тур не закончится вничью или пока не выяснится, что ничейный тур невозможен. Каким наименьшим числом туров они всегда могут обойтись? (*А. Шаповалов*)

62. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, в которой $\angle DAB = 2\angle CDA$. На стороне CD взята такая точка E, что $AE = DE$. Описанная окружность треугольника ABC пересекает основание AD в точке F. Докажите, что $BC + CE > EF$.

63. Какое наибольшее число клеток шахматной доски можно отметить так, чтобы не нашлось ни одного прямоугольного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток? (*И. Акулич*)

64. Пусть a, b, c, d – действительные числа, удовлетворяющие равенствам $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=6$ и $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}=8$. Какие значения может принимать выражение $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$? (*В. Сендеров*)

65. В квадрате $ABCD$ отмечены точки P и Q так, что точка P находится внутри треугольника ABC, точка Q – внутри треугольника CDA, а $\angle PAQ = \angle PCQ = 45°$. Докажите, что прямые BP и DQ параллельны. (*В. Произволов*)

66. Квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$, где p и q – целые числа, принимает положительные значения при всех целых x. Докажите, что он принимает положительные значения и при всех нецелых x. (*А. Шаповалов*)

67. В однокруговом турнире матбоёв участвуют десять команд. Для победы в турнире нужно набрать больше очков, чем каждая из остальных команд. Через какое наименьшее количество туров может определиться победитель? (*М. Мазин*)

68. На доске нарисованы квадрат и треугольник. Линиями, параллельными сторонам, квадрат разделён на n^2 одинаковых квадратиков, а треугольник – на n^2 одинаковых треугольничков. В каждом квадратике сидела муха. Затем они перелетели в треугольнички так, что в каждом треугольничке оказалось по одной мухе, а каждые две мухи, бывшие соседями в квадрате, оказались соседями и в треугольнике (соседними считаются квадратики или треугольнички, имеющие по крайней мере одну общую вершину). При каких n такое возможно? (*И. Акулич*)

69. **а**) На складе лежат 27 деталей, каждая из которых промаркирована первым или вторым сортом. Детали одного сорта весят одинаково, и каждая деталь второго сорта легче детали первого сорта. Известно, что одна из деталей промаркирована неправильно. Докажите, что её можно наверняка определить за три взвешивания на чашечных весах без гирь.

б) Докажите, что в аналогичной задаче для 81 детали неправильно промаркированную деталь можно наверняка определить за четыре взвешивания. (*А. Шаповалов*)

70. Для какого наибольшего n можно расставить на шахматной доске коней так, чтобы каждый бил ровно n других? (*А. Шаповалов*)

71. В треугольнике ABC одна из трисектрис угла A пересекается с одной из трисектрис угла B в ортоцентре этого треугольника. Найдите величины углов треугольника.

72. Назовём натуральное число полуквадратом, если оно представимо в виде ab^2, где a и b взаимно просты, $b > 1$. Какое наибольшее количество последовательных чисел могут быть не полуквадратами? (*А. Шаповалов*)

73. Через точку P внутри треугольника ABC и каждую из его вершин провели прямую. Они разделили треугольник на шесть треугольников, которые раскрасили в белый и чёрный цвета через один. Докажите, что сумма площадей трёх белых треугольников равна сумме площадей трёх чёрных тогда и только тогда, когда точка P лежит на одной из медиан треугольника ABC. (*В. Произволов*)

74. Решите в натуральных числах систему уравнений $\begin{cases} xy = zt, \\ x^y = z^t. \end{cases}$

75. Могут ли среди значений квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами при целых значениях аргумента встретиться все натуральные степени тройки? (*А. Шаповалов*)

76. В кучке лежат 2003 ореха. Можно разбивать любую кучку на две части, но чтобы разбить на две неравные части, нужно заплатить рубль. Какую наименьшую сумму придётся потратить, чтобы получить 2003 кучки по одному ореху? (*А. Шаповалов*)