VI турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Усинская»
Самарская область
25 июня - 1 июля 2000 года

Личная олимпиада

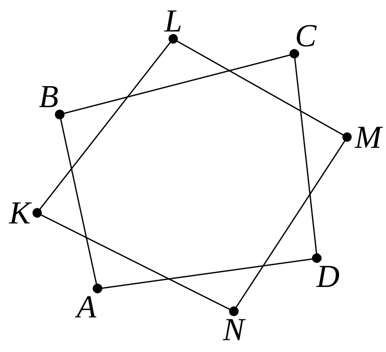
1. Петя отправился пешком из лагеря в посёлок. В 12:00, когда Петя был в a км от лагеря, его догнал велосипедист, посадил и подвёз, высадив в a км от посёлка. После этого Петя пришёл в посёлок в 14:00. Сколько времени потребуется Пете на обратный путь пешком, если известно, что на велосипеде его везли с вдвое большей скоростью, чем он ходит пешком? (*А. Шаповалов*)

2. Внутри треугольника ABC, в котором $\angle A = 40°$, взята такая точка M, что $\angle BMC = 110°$. Серединные перпендикуляры к отрезкам BM и CM пересекают стороны AB и AC в точках P и Q. Докажите, что точки P, M, Q лежат на одной прямой. (*Д. Калинин*)

3. В книге встретилось несколько дат, каждая из которых записана шестью цифрами (например, 29.06.00 – дата проведения олимпиады). Могло ли случиться, что каждая цифра от 0 до 9 встретилась одинаковое число раз? (*А. Шаповалов*)

4. На некоторой клетке шахматной доски стоит король. Два игрока по очереди передвигают его по доске. Запрещено возвращать короля на клетку, в которой он был только что. Выигрывает тот, после чьего хода король окажется на клетке, в которой он уже побывал. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*И. Акулич*)

5. Два пересекающихся выпуклых четырёхугольника $ABCD$ и $KLMN$ образуют фигуру, состоящую из восьмиугольника и восьми треугольников (см. рисунок). Высоты этих треугольников, опущенные из вершин A, B, C, D, K, L, M, N, равны. Докажите, что у четырёхугольников $ABCD$ и $KLMN$ равны периметры и равны площади. (*В. Произволов*)



6. В состоящем из n элементов множестве M выбрано несколько подмножеств (множество M является подмножеством самого себя). При этом каждое невыбранное подмножество множества M представимо в виде пересечения некоторых выбранных подмножеств. Какое наименьшее число подмножеств могло быть выбрано? (*А. Скопенков*)

7. Дано несколько различных натуральных чисел. Среди каждых трёх из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для каждых двух чисел одинакового цвета одно делилось на другое. (*Е. Черепанов*)

Первый тур

8. Решите ребус СТО · СТО = СЕКРЕТ. (*И. Григорьева*)

9. Заведённый механический будильник звенит, когда часовая стрелка совпадает со стрелкой будильника. Петя завёл будильник на некоторое время с целым числом минут. Проснувшись раньше звонка, он обнаружил, что часовая стрелка направлена по биссектрисе угла между минутной и стрелкой будильника. Через 3 минуты, когда стрелка будильника оказалась биссектрисой угла между часовой и минутной стрелками, Петя встал, не дождавшись звонка. На какое время был заведён будильник? (*А. Шаповалов*)

10. Пусть n – произвольное натуральное число. Докажите, что число n! представимо в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся не более чем вдвое.

(*С. Конягин*)

11. Положительные числа a, b, c таковы, что наибольшее из них равно наибольшему из чисел $\frac{a^2}{b}$, $\frac{b^2}{c}$, $\frac{c^2}{a}$. Докажите, что $a = b = c$. (*В. Сендеров*)

12. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC равны 1 и 2001 соответственно, а длина AB равна 2000. На прямой AD отметили точку E, равноудалённую от вершин C и D. Найдите DE. (*Л. Молоков*)

13. Две точки поверхности куба, отличные от его вершин, соединены ломаной наименьшей длины, звенья которой лежат на поверхности куба. Докажите, что ломаная не проходит ни через какую вершину куба. (*С. Тасмуратов*)

14. В ряд слева направо были выставлены гирьки массами 1 г, 2 г, …, 13 г. Из них осталось только семь стоящих подряд, а остальные шесть гирек потеряли. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах определить, какие гирьки остались? (*С. Токарев*)

15. В клетках таблицы 5×5 расставлено 25 чисел. Для каждой клетки нашли сумму её числа и чисел всех клеток, имеющих с ней общую сторону или вершину. Числа в каких клетках можно определить, зная эти суммы, а в каких нельзя? (*С. Волчёнков*)

Второй тур

16. Найдите три таких последовательных целых числа a, b, c, чтобы количества корней у уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$ и $cx^2 + ax + b = 0$ были разными. (*А. Шаповалов*)

17. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взята такая точка M, что $BM : MC = 2 : 1$. Луч DM пересекает прямую AB в точке E, а луч OM пересекает прямую CD в точке F, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Докажите, что прямые BD и EF параллельны. (*Д. Калинин*)

18. В каждой вершине кубика написано число. Про каждое из этих чисел, за исключением одного, известно, что оно на единицу больше среднего арифметического всех своих соседей (то есть чисел, соединённых с ним ребром). На сколько оставшееся число отличается от среднего арифметического своих соседей? (*О. Петрачков*)

19. Все клетки бесконечного листа клетчатой бумаги, кроме квадрата 7×7, окрашены. Вася покрасил в этом квадрате клетку, у которой ровно одна соседняя по стороне клетка окрашена, затем ещё одну клетку, у которой теперь ровно одна соседняя клетка окрашена, и так далее. Какое наибольшее количество клеток может покрасить Вася таким образом?

(*Д. Калинин*)

20. Есть 101 банка консервов массами 1000 г, 1001 г, …, 1100 г. Этикетки с массами потерялись, но завхоз помнит, какая банка сколько весит. Он хочет убедить в этом ревизора за наименьшее число взвешиваний. Есть двое чашечных весов: одни точные, другие грубые. За одно взвешивание можно сравнить две банки. Точные весы всегда показывают, какая банка тяжелее, а грубые – только если разница больше 1 г (иначе показывают равновесие). Завхоз может использовать только одни весы. Какие ему следует выбрать? (*А. Шаповалов*)

21. Бивис и Батт-Хед за ночь посмотрели три программы видеоклипов. Первая программа содержала в полтора раза меньше клипов, чем вторая, а всего в трёх программах было 200 клипов. Из всего просмотренного Бивису понравилась лишь пятая часть клипов первой программы и половина клипов второй программы. Батт-Хеду понравилось столько же клипов, сколько и Бивису, в том числе все клипы третьей программы. Сколько клипов им не понравилось? (*И. Акулич*)

22. Существуют ли два таких различных натуральных числа a и b, что $a^{20}+b^{20}$ делится на каждое из чисел $a+b$, a^2+b^2, …, $a^{19}+b^{19}$? (*Е. Черепанов*)

23. Из четырёх палочек можно сложить четырёхугольник, диагонали которого перпендикулярны. Докажите, что из этих палочек можно сложить четырёхугольник с двумя прямыми углами. (*Л. Смирнова*)

Третий тур

24. В ряд записано 2000 различных натуральных чисел. Известно, что для каждого натурального $k \le 2000$ сумма любых k чисел, записанных подряд, делится на k. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех 2000 чисел. (*И. Акулич*)

25. Через середину биссектрисы BL треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная ей. Может ли эта прямая пересекать отрезок AC? (*В. Замков*)

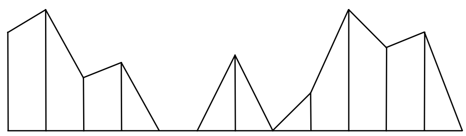
26. Петя и Коля играют в морской бой по изменённым правилам. У каждого из них имеется доска 10×10. Петя расставляет на своей доске корабли размером 1×3, а Коля на своей – корабли размером 1×4. Границы кораблей должны идти по сторонам клеток, и корабли не должны соприкасаться даже вершинами. Победителем считают того, кто расставил больше кораблей. Может ли Петя гарантировать себе победу? (*В. Каскевич*)

27. Есть несколько кусков сыра разной массы и разной цены за килограмм. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков и после этого разложить все куски на две кучки одинаковой массы и одинаковой стоимости. (*А. Шаповалов*)

28. Александр Васильевич утверждает, что любые шесть последовательных целых чисел можно расставить вместо вопросительных знаков в систему уравнений $\begin{cases} ?\cdot x + ?\cdot y = ?, \\ ?\cdot x + ?\cdot y = ? \end{cases}$ так, что система будет иметь решение в целых числах. Прав ли он?

(*А. Шаповалов*)

29. На прямой горизонтальной линии через каждый метр поставили 100 вертикальных отрезков (в одну полуплоскость), суммарная длина которых равна 1 км (некоторые отрезки могут иметь нулевую длину). По верхушкам всех отрезков натянули леску (см. рисунок). Какую наибольшую площадь может иметь фигура, ограниченная леской, прямой и крайними отрезками? (*Д. Калинин*)



30. Стоимость игры на игровом автомате в казино составляет 2000 долларов. При уплате игроком этой суммы автомат включается и выбрасывает десять фишек, среди которых могут быть красные, белые и синие. Любую красную фишку можно обменять в кассе на 1 доллар, белую – на 300 долларов, а синюю фишку можно опустить в щель автомата, и тот выбросит десять фишек. Игра продолжается, пока у игрока не кончатся синие фишки. В конце игры выяснилось, что игрок остался при своих – ничего не выиграл и ничего не проиграл. Сколько раз сработал автомат? (*И. Акулич*)

31. На собрании аборигенов – рыцарей и лжецов – путешественник пытается определить самого старшего. Ему известно, что возрасты всех различны и что среди присутствующих рыцарей и лжецов поровну. Ему разрешается выбрать любую группу из нескольких (более одного) аборигенов и спросить любого из присутствующих, кто в этой группе самый старший. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут. Докажите, что при любом количестве аборигенов путешественник не сможет гарантированно определить самого старшего, сколько бы вопросов он ни задавал. (*А. Шаповалов*)

Четвёртый тур

32. Два натуральных числа таковы, что их сумма, их разность, а также частное от деления одного из них на другое являются факториалами. Найдите все такие пары. (*И. Акулич*)

33. Дан равносторонний треугольник, длина стороны которого равна 1. Ломаная строится по следующему правилу: из точки на стороне (не в вершине) восстанавливается перпендикуляр до пересечения с какой-либо из сторон, из полученной точки пересечения снова восстанавливается перпендикуляр и так далее. Найдите все точки на сторонах треугольника, стартовав из которых, ломаная рано или поздно попадёт в вершину треугольника. (*А. Шаповалов*)

34. Отрезки AC и BC равны и перпендикулярны. Найдите множество таких точек M, для которых $\angle AMC = \angle CMB$. (*А. Егоров*)

35. Решите в положительных числах уравнение $(x+y+z)^2 = x^3 + y^3 + z^3 + 12$. (*А. Эвнин*)

36. Есть набор гирек массами 1 г, 2 г, …, 50 г и чашечные весы. Два игрока по очереди кладут на весы по одной гирьке из набора, каждый на свою чашу. После хода каждого игрока его чаша должна перевесить. Выигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

37. Вписанная окружность равнобедренного треугольника касается его основания в точке D, а боковых сторон – в точках E и F. Прямая, проведённая через точку E параллельно прямой DF, повторно пересекает вписанную окружность в точке P. Докажите, что точка P принадлежит средней линии треугольника. (*Д. Калинин*)

38. В Цветочном городе живут 2000 коротышек. Каждый коротышка каждый день дарит всем своим друзьям по одному подарку. Во избежание разорения дарёное разрешается дарить дальше, но только не тому, кто этот подарок подарил. Знайка подсчитал, что никакой из подарков, который подарили любому коротышке в пятницу, не может вернуться к этому коротышке раньше чем в следующую пятницу. Докажите, что у какого-то коротышки не более 12 друзей. (*Е. Черепанов*)

39. Секретный объект представляет собой квадрат 8×8, разбитый коридорами на единичные квадратики. В каждой вершине такого квадратика есть переключатель. Щелчок переключателя меняет освещённость сразу всех коридоров длины 1, выходящих из этой вершины (в освещённых коридорах свет выключается, а в неосвещённых – включается). Сторож находится в левом нижнем углу полностью неосвещённого объекта. Он может ходить только по освещённым коридорам и щёлкать переключателями сколько угодно раз. Может ли сторож перебраться в **а**) правый верхний угол; **б**) левый верхний угол, погасив при этом свет во всех коридорах и вернув тем самым объект в первоначально секретное состояние? (*А. Шаповалов*)

40. Таблица 3×8 заполнена единицами. За один ход можно увеличить на 1 все числа какой-либо строки или все числа какого-либо столбца. Через какое количество ходов можно получить таблицу, изображённую на рисунке? (*Д. Калинин*)

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24

41. Можно ли поверхность куба оклеить в один слой прямоугольниками так, чтобы каждый из них граничил (по отрезку) ровно с пятью другими? (*А. Шаповалов*)

42. Электронные часы показывают время (часы и минуты) от 00:00 до 23:59. Найдите все такие показания часов, когда число минут, прошедших с полуночи, ровно в 100 раз больше суммы цифр на часах. (*А. Шаповалов*)

Финал

43. Докажите, что из бесконечной последовательности 2, 6, …, $n(n+1)$, … можно выбрать 2000 различных чисел (не обязательно идущих подряд), сумма которых является точным квадратом. (*В. Замков*)

44. Докажите, что если сумма $\left(\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right)^2+\left(\frac{b^2-c^2-a^2}{2ca}\right)^2+\left(\frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}\right)^2$ равна 1, то одно из слагаемых равно 0. (*Д. Калинин*)

45. На плоскости отмечено несколько точек. Назовём тройку параллельных прямых красивой, если расстояния между соседними прямыми одинаковы, все отмеченные точки лежат на этих прямых и на каждой прямой найдётся отмеченная точка. Какое наибольшее число точек может быть отмечено так, чтобы для них нашлись три красивые тройки прямых? (*А. Шаповалов*)

46. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждая из них била чётное количество остальных? (*А. Шаповалов*)

47. В остром угле AOB между стенками геометрического бильярда расположены два шара P и Q. Если шар P ударить так, что он, отразившись последовательно от стенок OA и OB (по закону «угол падения равен углу отражения»), столкнётся с шаром Q, то пройденное им расстояние будет таким же, как если его ударить так, что он, отразившись последовательно от стенок OB и OA, столкнётся с шаром Q. Докажите, что точки P и Q расположены на одном луче, выходящем из точки O. (*В. Произволов*)

48. В остроугольном треугольнике ABC, в котором $\angle A = 45°$, проведена высота BD. Окружность с центром I, вписанная в треугольник BCD, касается стороны BD в точке E. Докажите, что прямая CI параллельна прямой EF, где F – середина AB. (*Д. Калинин*)

49. При спешной посадке в аэробус пассажиры занимали первые попавшиеся места. В итоге все места оказались заняты, а для любой группы, в которой не более 100 пассажиров, среднее арифметическое номеров занимаемых ими мест более чем на единицу отличалось от среднего арифметического номеров мест, указанных в их билетах. Каково наименьшее возможное число мест в этом аэробусе? (*С. Токарев*)

50. У каждого из двух игроков есть стопка карт. Игроки берут по верхней карте из стопок и сравнивают. Если достоинства одинаковы, карты выходят из игры. Если у кого-то карта старше, он забирает обе карты и кладёт их в низ своей стопки: сначала карту противника, потом свою. Если у кого-то одного кончились карты, он проиграл, в остальных случаях (карты кончились одновременно или игра продолжается бесконечно) – ничья. Игроки разделили полную колоду из 36 карт пополам: одному – все красные, второму – все чёрные. Второй подглядел, в каком порядке первый сложил свою стопку. Докажите, что тогда он сможет так сложить свою стопку, чтобы наверняка выиграть.
(*А. Шаповалов, М. Шаповалов*)

Источник: http://tursavin.ru