IV турнир математических боёв имени А.П. Савина

Лечебно-оздоровительный комплекс «Приморский хуторок»
Ярославская область
26 **июня** - 2 **июля** 1998 **года**

Личная олимпиада

1. Однажды в понедельник Петя принёс в школу и дал почитать Коле сборник фантастических рассказов. Во вторник Коля передал его Грише, а Гриша в четверг – Саше, который в следующий понедельник передал его Володе, и так далее, причём каждый держал у себя книгу вдвое дольше предыдущего. В результате книга вернулась к Пете опять в понедельник, но лишь в следующей учебной четверти. Сколько ребят успело её прочесть? (*И. Акулич*)

2. В каждом из трёх трёхзначных чисел, сумма которых равна 1998, первую цифру поменяли местами с последней. Докажите, что сумма полученных чисел также равна 1998, если известно, что в записи этих чисел никакие цифры, кроме 1, 8 и 9, не участвуют. (*В. Произволов, С. Токарев*)

3. В ряд стоят 100 гирек, при этом массы каждых соседних гирек различаются на 1 г. Докажите, что гирьки можно разложить на две чаши весов так, что весы будут в равновесии. (*В. Произволов*)

4. В клетчатом квадрате 6×6, первоначально пустом, Саша закрашивает по одной клетке, вписывая в каждую только что закрашенную клетку число граничащих с нею по стороне ранее закрашенных клеток. Докажите, что когда будут закрашены все клетки, сумма чисел в них станет равна 60. (*А. Шаповалов*)

5. Докажите, что любой прямоугольник можно разрезать на три части, из которых складывается выпуклый равносторонний шестиугольник. (*А. Берштейн, С. Токарев*)

6. Имеется десять бочек, содержащих 1 л, 2 л, …, 10 л воды. Каждая бочка может вместить всю воду. Разрешается добавлять в бочку столько воды, сколько в ней есть, из другой бочки. Какое наибольшее количество воды можно собрать в одной бочке? (*Р. Женодаров, Г. Челноков*)

Первый тур

7. При каком наименьшем количестве слагаемых в левой части ребус СТУК + СТУК + … + СТУК = АААААА имеет решение? (*И. Григорьева*)

8. Торт имеет форму выпуклого пятиугольника со свечами в вершинах. Обязательно ли на торте найдётся точка, начиная от которой прямыми разрезами можно разделить торт на пять частей одинаковой площади, в каждой из которых есть свеча? (*С. Волчёнков*)

9. Король обошёл все клетки шахматной доски, побывав на каждой клетке по одному разу. Когда соединили центры клеток, по которым он последовательно проходил, получилась ломаная без самопересечений. Найдите наибольшее возможное число диагональных ходов в маршруте короля. (*И. Акулич*)

10. Окружность пересекает все стороны треугольника. Докажите, что её радиус больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

11. При вычислении на калькуляторе суммы 100 слагаемых $19{,}98 + 19{,}98 + \ldots + 19{,}98$ Петя несколько раз ошибался, сдвигая в слагаемом запятую на один знак – иногда вправо, иногда влево. Мог ли результат оказаться вдвое больше правильного? (*А. Шаповалов*)

12. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 99, все цифры которого чётны. (*С. Волчёнков*)

13. Концы каждого из 51 отрезка расположены на двух противоположных сторонах прямоугольника и делят каждую на 50 равных частей (вершины прямоугольника – тоже концы отрезков). Докажите, что среди отрезков есть равные. (*А. Шаповалов*)

14. Два игрока по очереди красят стороны 37-угольника так, чтобы никакие соседние стороны не оказались одноцветными. Игра заканчивается, когда окрашены все стороны. Проигрывает тот, кто последним введёт в игру новый цвет. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

Второй тур

15. Последовательность задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n + a_{n+1}}$ при всех $n \geq 1$. Найдите a_{1998}. (*С. Токарев*)

16. Внутри выпуклого пятиугольника *ABCDE* взята точка *M*. Может ли оказаться, что каждая из прямых *MA*, *MB*, *MC*, *MD*, *ME* отсекает от пятиугольника *ABCDE* треугольник? (*С. Рукшин*)

17. Сергей Геннадьевич, взяв менее 100 рублей, пошёл гулять. Заходя в какое-либо кафе и имея при этом m рублей n копеек, он тратил n рублей m копеек. Какое наибольшее число кафе мог посетить Сергей Геннадьевич? (*С. Токарев*)

18. Диагонали равнобедренной трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* пересекаются в точке *O*. Докажите, что описанные окружности треугольников *ABO* и *DCO* пересекаются в центре описанной окружности трапеции.

19. На поверхности куба проведена замкнутая восьмизвенная ломаная, вершины которой совпадают со всеми вершинами куба. Какое наименьшее число звеньев этой ломаной может совпадать с рёбрами куба? (*С. Рукшин*)

20. Можно ли, используя каждую из десяти цифр ровно один раз, записать натуральное число и его квадрат? (*С. Токарев*)

21. Известно, что корнями квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ являются числа $\frac{a-b-c}{2a}$ и $\frac{c-a-b}{2a}$. Докажите, что один из корней по модулю равен 1. (*А. Савин*)

22. Капитан Кук попал на остров, каждый из 100 жителей которого – либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда врёт. Кук узнал, что среди туземцев есть хотя бы один лжец. Лжецы сговорились врать таким образом, что каких бы 50 жителей Кук ни собирал вместе, имеющиеся среди них лжецы на вопрос «Сколько среди собранных здесь туземцев рыцарей?» отвечали так, чтобы Кук всегда получал один и тот же набор из 50 ответов. Какое наибольшее число рыцарей могло быть на острове? (*Д. Калинин*)

Третий тур

23. Через точку *M* на стороне *AD* параллелограмма *ABCD* провели прямые параллельно диагоналям *DB* и *AC*. Прямые пересекли стороны *AB* и *DC* в точках *P* и *Q* соответственно. Докажите, что площади треугольников *PBM* и *QCM* равны. (*В. Произволов*)

24. Разложите на множители выражение
$x(a^2 + ab + b^2) + y(b^2 + bc + c^2) - (x + y)(c^2 + ca + a^2)$. (*С. Токарев*)

25. Натуральные числа m и n таковы, что $m^2 + n^2 + m$ делится на mn. Докажите, что m – точный квадрат. (*Л. Курляндчик*)

26. Любое ли чётное натуральное число можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, каждое из которых состоит из нечётных цифр? (*А. Шаповалов*)

27. Внутри равнобедренного треугольника ABC отметили точки M, N, K так, что точка N – ближайшая к основанию AC, а отрезки MN и KN параллельны BC и BA соответственно. Докажите, что $AM + CK > MN + KN$.

28. Ящики расставлены в бесконечный в обе стороны ряд. В начальный момент в одном из них лежит шар, а остальные ящики пусты. Имеется неограниченный запас шаров. Разрешается вынуть один шар из любого ящика, а взамен положить по одному шару в каждый из двух соседних с ним ящиков. После того как неоднократно проделали эту операцию, в нескольких расположенных подряд ящиках оказалось по одному шару, а остальные были пусты. Найдите число непустых ящиков. (*И. Акулич*)

29. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждая ладья находилась под боем не более чем трёх из остальных? (*В. Шорин*)

30. Рассмотрим все промежутки времени в июне некоторого года, состоящие из целого числа дней. Найдите наибольшее возможное количество промежутков, в течение каждого из которых случилось нечётное число дождливых дней. (*С. Токарев*)

Полуфинал

31. Врач дал больному пакетик с таблетками и велел принимать ежедневно по четверти таблетки. Тот так и сделал, причём каждый раз он вынимал из пакетика наугад что попадётся. Если попадалась целая таблетка, он делил её на четыре части, одну из которых съедал, а остальные возвращал обратно. Если же попадалась четвертинка, он её просто проглатывал. Больной начал принимать таблетки первого числа некоторого месяца, и в конце месяца в пакетике оказалось в 8 раз больше четвертинок, чем целых таблеток, а ещё через три месяца осталось лишь пять целых таблеток. Сколько осталось четвертинок? (*И. Акулич*)

32. Найдите все такие тройки натуральных чисел (a, b, c), что числа $a^3 + 6ab + 20$, $b^3 + 6bc + 20$ и $c^3 + 6ca + 20$ являются точными кубами. (*Л. Курляндчик*)

33. По кругу выписано N различных натуральных чисел, не превосходящих 1000, так, что сумма каждых двух из них, стоящих через одно, делится на 3. Найдите наибольшее возможное значение N. (*Е. Аринкина*)

34. На шахматной доске стояли 16 королей, каждый из которых бил хотя бы одного из остальных. После того как нескольких королей убрали, никакие два из оставшихся не стали бить друг друга. Какое наибольшее число королей могло остаться? (*С. Токарев*)

35. На плоской поверхности лежит несколько круглых монет. Докажите, что для любой не покрытой монетами точки P этой поверхности найдётся монета, вид на которую из P не загорожен другими монетами. (*С. Рукшин*)

36. Последовательность задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n + 106}$ при всех $n \geq 1$. Докажите, что $a_{1000} < 10$. (*И. Акулич*)

37. По окружности, разбитой на несколько дуг, прыгает блоха. Перед каждым своим прыжком она узнаёт длину дуги, на которой находится, а затем прыгает так, чтобы сместиться по часовой стрелке на дугу вычисленной длины. Если блоха попала на границу двух дуг, то считается, что она находится на той дуге, которая идёт по часовой стрелке от неё. Докажите, что блоха побывает на всех дугах. (*А. Шаповалов*)

38. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка B_1. Постройте на сторонах AB и BC соответственно точки C_1 и A_1 так, чтобы площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C были равны. (*В. Произволов*)

Финал

39. В одном из углов шахматной доски лежит плоский картонный квадрат 2×2, а в противоположном углу – квадрат 1×1. Два игрока по очереди перекатывают каждый свой квадрат через сторону: Боря – большой квадрат, а Миша – маленький. Боря выигрывает, если Мишин квадрат окажется на клетке, накрытой Бориным квадратом. Начинает Боря. Может ли он выиграть, независимо от игры Миши? (*А. Шаповалов*)

40. Целые числа a, b, c, x, y, z таковы, что $a + b + c = x + y + z = 0$. Докажите, что $(abz^2 + bcx^2 + cay^2)(xyc^2 + yza^2 + zxa^2)$ – четвёртая степень целого числа. (*В. Произволов*)

41. Отметьте по три точки внутри и вне равностороннего треугольника, вершины которого уже отмечены, таким образом, чтобы нашлось девять равносторонних треугольников (включая данный) с вершинами в отмеченных девяти точках. (*Д. Калинин*)

42. В стране 25 городов. Три авиакомпании хотят, чтобы для каждых двух городов все беспосадочные авиарейсы между ними осуществлялись только одной из авиакомпаний, однако каждая авиакомпания могла бы доставлять пассажиров из каждого города в любой другой с посадкой не более чем в одном промежуточном городе. Докажите, что это осуществимо. (*С. Токарев*)

43. На столе лежит стопка открыток, причём все они «смотрят» картинкой вверх. Разрешается вынуть любые две соседние открытки, перевернуть их (так, чтобы верхняя открытка оказалась снизу, а нижняя – сверху) и вложить в то же место. Требуется с помощью нескольких таких операций расположить открытки в обратном порядке, и чтобы они по-прежнему лежали картинкой вверх. При каком количестве открыток в стопке это можно сделать? (*И. Акулич*)

44. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса угла A, пересекающая серединный перпендикуляр к стороне BC в точке A_1. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Как по точкам A_1, B_1, C_1 восстановить треугольник ABC? (*И. Акулич*)

45. Тысяче солдат присвоили порядковые номера от 1 до 1000, а затем командир спросил каждого, хочет ли он в разведку. Солдат, имеющий номер i ($i = 1, 2, \ldots, 1000$), захотел в разведку, если в разведотряде будет не менее $\frac{i^2}{1000}$ и не более i человек. Какую набольшую численность может иметь разведотряд, где удовлетворены пожелания всех пошедших в разведку? (*С. Волчёнков*)

46. Может ли конь сделать восемь ходов и вернуться в исходную клетку, побывав при этом на всех горизонталях и вертикалях шахматной доски? (*А. Спивак*)

Источник: http://tursavin.ru