III заключительный конкурс «Математика 6-8»

Лечебно-оздоровительный комплекс «Приморский хуторок» Ярославская область

20-26 **августа** 1997 **года**

Личная олимпиада

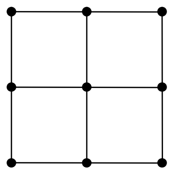
1. На доске в ряд выписано 100 семёрок. Можно ли между некоторыми из них поставить плюсы и минусы так, чтобы полученное выражение равнялось 1997?
(*Р. Женодаров*)

2. Можно ли в клетки таблицы 3×3 записать все натуральные числа от 1 до 9 так, чтобы сумма чисел в каждых двух соседних по стороне клетках равнялась простому числу? (*С. Волчёнков*)

3. Докажите, что любой выпуклый четырёхугольник можно разрезать на четыре четырёхугольника, каждый из которых является параллелограммом или трапецией.
(*В. Произволов*)

4. На первой встрече делегаций Земли и Марса выяснилось, что ноги у марсиан такие же, как у большинства людей, а вот количества рук и пальцев на руках другие. Хотя марсиан было на шесть больше, чем землян, общее число пальцев (на руках и на ногах) у марсиан оказалось на один меньше. Сколько всего участников было на встрече?
(*И. Акулич*)

5. Какое наименьшее число звеньев может иметь замкнутая ломаная без самопересечений, пересекающая каждый из 12 отрезков на рисунке и не проходящая через их концы? (*С. Волчёнков*)



6. Три гонщика ездят по круговому велотреку в одном направлении с разными постоянными скоростями. Известно, что для каждых двух гонщиков на велотреке имеется ровно k точек, в которых один обгоняет другого. Докажите, что число k нечётно. (*С. Токарев*)

7. Имеется $n > 2$ кошельков, в каждом из которых 20 монет. Все монеты на вид одинаковы, однако в одном кошельке все монеты на 1 г легче настоящих, в другом – на 1 г тяжелее настоящих, а в остальных кошельках все монеты настоящие. Масса настоящей монеты известна. При каких значениях n за одно взвешивание на точных пружинных весах со стрелкой можно наверняка определить, в каких кошельках какие монеты?
(*С. Волчёнков*)

Первый тур

8. Дано четыре различных натуральных числа. Может ли каждое из них делиться на разность каждых двух из трёх остальных? (*С. Токарев*)

9. Сколько корней имеет уравнение $19[x] + 97\{x\} = 1997$? (*С. Дворянинов*)

10. Полуокружность радиуса 1 находится вне квадрата со стороной 4 и перемещается по плоскости так, что её концы всё время остаются на контуре квадрата. Найдите площадь фигуры, заметаемой этой полуокружностью. (*С. Дворянинов*)

11. Точку, расположенную внутри выпуклого четырёхугольника, соединили со всеми его вершинами, при этом четырёхугольник разбился на четыре равных треугольника. Верно ли, что этот четырёхугольник является ромбом? (*Д. Калинин*)

12. Есть n карточек, пронумерованных числами от 1 до n. Их разложили в две стопки. При каком наименьшем значении n обязательно найдутся две карточки, лежащие в одной стопке, сумма номеров которых – точный квадрат? (*П. Филевич*)

13. Малыш и Карлсон купили пирожные и мороженое. Малыш за семь пирожных и девять порций мороженого заплатил больше 20 крон, а Карлсон за n пирожных и 16 порций мороженого заплатил меньше 42 крон. При каких значениях n можно утверждать, что порция мороженого дороже пирожного, если пирожное стоит не менее 0,01 кроны? (*С. Дворянинов*)

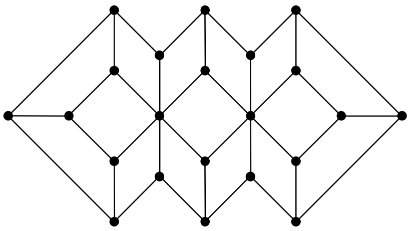
14. На шахматной доске расположено шесть уголков, каждый из которых покрывает три клетки. Докажите, что один из них можно сдвинуть в пределах доски, не сместив ни один другой уголок. (*О. Крижановский*)

15. Когда чертёжный карандаш укорачивается до 2 см (так называемый «огрызок»), он становится непригодным для работы и выбрасывается. Чертёжник приобрёл в магазине 40 длинных карандашей, шесть одинаковых коробок средних, которые на 3 см короче длинных, и девять одинаковых коробок коротких, которые вдвое короче длинных. Впоследствии выяснилось, что длинных карандашей хватило на такой же объём работы, что и средних, и на тот же, что и коротких. Сколько получилось огрызков, если начальная длина каждого карандаша не менее 5 см? (*И. Акулич*)

Второй тур

16. Докажите, что если a, b, c – различные целые числа, то значение выражения $\frac{a(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$ является целым числом.

17. Схема городов и дорог в некотором государстве изображена на рисунке. Можно ли обойти все города, побывав в каждом из них ровно по одному разу? (*С. Волчёнков*)



18. Назовём дистанцией между двумя многоугольниками площадь их симметрической разности, то есть сумму их площадей, уменьшенную на удвоенную площадь их пересечения. Докажите, что для трёх произвольных многоугольников дистанция между любыми двумя из них не превосходит суммы дистанций от них до третьего многоугольника. (*А. Савин*)

19. Вася написал четыре утверждения: «n^3 делится на 3», «n^3 делится на 9», «n^3 делится на 27», «n^3 делится на 81». Известно, что среди них есть хотя бы одно истинное и хотя бы одно ложное, а n – натуральное число. Можно ли по этим условиям однозначно определить, сколько истинных утверждений написал Вася? (*Р. Женодаров*)

20. Через точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника провели прямые, соответственно параллельные биссектрисам противолежащих углов. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке. (*С. Токарев*)

21. В таблице разрешается менять местами любые две строки и любые два столбца. Можно ли из левой таблицы в результате нескольких таких операций получить правую? (*И. Копылов*)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

12	9	6	11
4	1	2	3
8	5	10	7

22. Рассмотрим все правильные, в том числе сократимые, дроби со знаменателями, не превосходящими 1997. Можно ли разбить их на две группы так, чтобы были равны как количества дробей в обеих группах, так и их суммы? (*О. Крижановский*)

23. Льюис Кэрролл как-то отправил своей племяннице следующий отчет:

	Фунты	Шиллинги	Пенсы
За одну похищенную перчатку		2	0
За боль от потери		3	8,5
За доставленное беспокойство		4	4,5
За причинённые неприятности		14	7
За время, потраченное на поиски вора		1	6
ИТОГО	1	6	2

Можно ли по этим данным определить, сколько в фунте шиллингов, а в шиллинге пенсов, если в фунте больше шиллингов, чем в шиллинге пенсов? (*И. Акулич*)

Третий тур

24. Двое играют на полоске из 1997 клеток, первоначально пустой. У них имеется мешок с достаточно большим количеством фишек. За один ход игрок может либо взять фишку из мешка и поставить её на любую свободную клетку, либо передвинуть какую-нибудь из уже стоящих фишек вправо на ближайшую свободную клетку (если такая найдётся). Игроки ходят по очереди, и проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шанин*)

25. Докажите, что число $1994 \cdot 1995 \cdot 1996 \cdot 1998 \cdot 1999 \cdot 2000 + 36$ является точным квадратом. (*В. Произволов*)

26. Разрежьте ромб двумя прямыми на четыре четырёхугольника, в каждый из которых можно вписать окружность и около каждого из которых можно описать окружность. (*В. Произволов*)

27. Среди 16 различных чисел, расставленных по кругу, отметим те, которые равны сумме двух своих соседей. Какое наибольшее количество чисел может быть отмечено? (*Р. Женодаров*)

28. В телеконкурсе участвовали восемь юношей и восемь девушек. Каждый юноша поссорился с 14 участниками, а каждая девушка – с семью участниками (ссоры взаимные). Докажите, что из участников передачи можно составить восемь пар, каждая из которых состоит из не поссорившихся между собой юноши и девушки. (*С. Волчёнков*)

29. Концы пяти параллельных хорд делят окружность на десять дуг. Известно, что для каждой из этих дуг соседние с ней дуги равны между собой. Докажите, что сумма длин средней и двух крайних хорд равна сумме двух других. (*В. Произволов*)

30. Можно ли 100 гирь массами 1 г, 2 г, …, 100 г разложить на десять кучек разной массы так, чтобы чем тяжелее была кучка, тем меньше было в ней гирь? (*С. Токарев*)

31. Сколько чисел, кратных 13, имеется среди первых 100 членов последовательности 1, 11, 111, …? (*Р. Женодаров*)

Полуфинал

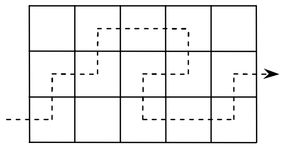
32. На столе лежат 13 карточек, пронумерованных числами от 1 до 13. Петя и Вася по очереди берут по одной карточке. Начинает Петя, он стремится к тому, чтобы сумма номеров взятых им карточек оказалась в итоге простым числом. Может ли Вася ему помешать?

33. Внутри квадрата со стороной 10 расположен невидимый единичный квадратик, стороны которого параллельны сторонам большого квадрата. Про любой многоугольник можно узнать, какая доля его площади лежит внутри невидимого квадратика. Можно ли при помощи двух таких многоугольников определить местоположение невидимого квадратика? (*С. Токарев*)

34. Чему равно наибольшее значение выражения, полученного путём расстановки скобок в выражении $1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \ldots + 1 \cdot 1$ (всего 1997 единиц)? (*С. Волчёнков*)

35. На доске были начерчены графики функций $y = ax + b$ и $y = bx + a$, где a и b – различные неизвестные числа. С доски стёрли всё, кроме точки пересечения этих графиков и точек их пересечения с осью ординат. Восстановите ось абсцисс. (*Р. Женодаров*)

36. Доску 3×5 необходимо пройти слева направо, переходя каждым ходом в соседнюю по стороне клетку и не проходя никакую клетку дважды. Первый и последний участки пути должны быть горизонтальными. Сколькими способами это можно сделать? На рисунке приведён пример одного из возможных путей. (*С. Волчёнков*)



37. Последовательность задана условиями $a_1 = 19$, $a_2 = 97$, $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + 1}{a_n}$ при всех $n \geq 1$. Найдите a_{1997}. (*А. Савин*)

38. В некотором году три идущих подряд месяца содержали ровно по четыре воскресенья. Докажите, что один из этих месяцев – февраль. (*С. Токарев*)

39. Существуют ли такие различные натуральные числа a, b, c, x, y, z, что $a + b + c = x + y + z$ и $ax = by = cz$? (*М. Панов*)

Финал

40. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно, а на отрезках C_1B, A_1C, B_1A – точки C_2, A_2, B_2 соответственно. Известно, что отрезки C_1A_2, A_1B_2, B_1C_2 проходят через одну точку и параллельны сторонам треугольника ABC. Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны. (*В. Произволов*)

41. В клетках таблицы 4×4 расставлено 16 чисел. Таблица, изображённая на рисунке, получена из исходной одновременной заменой каждого числа на среднее арифметическое шести других чисел, стоящих с ним в одной строке или в одном столбце. Восстановите исходную таблицу. (*С. Волчёнков*)

1	0	0	0
0	9	0	0
0	0	9	0
0	0	0	7

42. На доске написали 16 трёхзначных чисел, дающих различные остатки при делении на 16. Какое наименьшее количество различных цифр могло быть при этом использовано? (*С. Конягин*)

43. Десять монет, среди которых есть как настоящие, весящие по 10 г, так и фальшивые, весящие по 9 г, выложены в ряд. Известно, что каждая настоящая монета лежит левее каждой фальшивой. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить все настоящие монеты? (*С. Токарев*)

44. Придумайте три треугольника, из которых можно составить (без наложений) и треугольник, и выпуклый четырёхугольник, и выпуклый пятиугольник. При составлении каждой из этих фигур необходимо использовать все три треугольника, треугольники разрешается переворачивать. (*О. Крижановский*)

45. На каждом из двух одинаковых кубов отмечено по пять вершин. Докажите, что можно совместить эти кубы так, чтобы совпало не менее четырёх пар отмеченных вершин. (*С. Волчёнков*)

46. Докажите неравенство $x^2(x^2-y^2)(x^2-z^2)+y^2(y^2-z^2)(y^2-x^2)+z^2(z^2-x^2)(z^2-y^2)\geq 0$.

(*В. Произволов*)

47. Вначале в банку посадили одну амёбу. Каждую секунду либо несколько амёб делятся на шесть амёб каждая, либо ровно одна из амёб умирает. Через какое наименьшее время в банке может оказаться ровно 1997 амёб? (*О. Крижановский*)

Источник: http://tursavin.ru