II заключительный конкурс «Математика 6-8»

Дом отдыха «Тихий уголок»
Костромская область
15-21 августа 1996 года

Личная олимпиада

1. На каждом километре шоссе между сёлами Ёлкино и Палкино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано, сколько километров до Ёлкино, а на другой – до Палкино. Боря заметил, что на каждом столбе сумма всех цифр равна 13. Каково расстояние от Ёлкино до Палкино? (*А. Шаповалов*)

2. Разрежьте прямоугольник 1×5 на пять частей, из которых можно сложить квадрат. (*Р. Садыков*)

3. В круге провели несколько (конечное число) различных хорд так, что каждая из них проходит через середину какой-либо другой из проведённых хорд. Докажите, что все эти хорды являются диаметрами круга. (*В. Произволов*)

4. Числа a, b, c таковы, что графики функций $y = ax + b$, $y = bx + c$ и $y = cx + a$ имеют общую точку. Докажите, что $a = b = c$. (*С. Токарев*)

5. В кассе купца Калашникова впервые за долгое время появились деньги – 99 монет. Известно, что одна из них фальшивая – она отличается по весу от настоящих, которые весят одинаково. Разгневанные работники требуют немедленной выдачи зарплаты, причём настоящими монетами. У приказчика имеются чашечные весы без гирь. Как только выясняется, что какие-либо монеты настоящие, они выплачиваются работникам и в дальнейших взвешиваниях не участвуют. Любопытный приказчик хочет определить, легче фальшивая монета настоящей или тяжелее. Сможет ли он наверняка это сделать? (*С. Токарев*)

6. Биссектрисы углов A и B выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D – в точке N. Известно, что точки M и N различны, а прямая MN перпендикулярна AB. Докажите, что углы A и B равны. (*Р. Женодаров*)

7. На доске 10×10 расположена эскадра из десяти кораблей. Корабли – это не имеющие общих точек прямоугольники 1×2 со сторонами по границам клеток. Докажите, что можно сделать 32 выстрела так, чтобы наверняка попасть в какой-нибудь корабль. (*Р. Женодаров*)

8. Наименьшее общее кратное некоторых 50 натуральных чисел равно наименьшему общему кратному других 50 натуральных чисел. Могут ли все эти 100 чисел быть последовательными? (*С. Токарев*)

Вариант 1

9. Поле для игры в морской бой имеет форму квадрата 8×8. На нём стоит один корабль – прямоугольник 1×4 со сторонами по линиям сетки. В клетках поля можно устанавливать детекторы, показывающие, накрывает ли корабль эту клетку. В какое наименьшее число клеток нужно поместить такие детекторы, чтобы по их показаниям можно было однозначно определить положение корабля? (*Р. Женодаров*)

10. Может ли сумма 10000 степеней тройки с целыми показателями равняться числу 33^{33}? (*Р. Женодаров*)

11. Прямые $ax + by + c = 0$, $bx + cy + a = 0$ и $cx + ay + b = 0$ пересекаются в одной точке с положительными координатами. Найдите эти координаты. (*Р. Женодаров*)

12. Серединные перпендикуляры к биссектрисам AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются на стороне AC. Докажите, что $AC^2 = AB \cdot BC$. (*С. Токарев*)

13. Петя выписывает числа: начав со своего возраста (в годах), каждое следующее число он получает прибавлением к предыдущему его наибольшей цифры. Может ли среди выписанных чисел встретиться число $1\underbrace{00...0}_{1996}996$? (*А. Шаповалов*)

14. Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного – за 17 минут. Маша открыла сначала горячий кран. Через сколько минут она должна открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налилось в полтора раза больше, чем холодной? (*А. Шаповалов*)

15. На доске написано 17 двузначных чисел. Математик возвёл одно из них в сотую степень. Оказалось, что полученное число делится на каждое из написанных. Докажите, что тогда оно делится и на их произведение. (*А. Шаповалов*)

16. В некотором царстве каждые два города соединены прямой дорогой (возможно, проходящей через промежуточные города). Дороги пересекаются только в городах. Соловей-разбойник грабит на больших дорогах, то есть на таких прямых дорогах, на которых находятся все города, за исключением, быть может, одного или двух. Покажите, что в некотором царстве больших дорог может и не быть. (*А. Шаповалов*)

Вариант 2

17. Пусть a, b и n – такие натуральные числа, что $a^{96} + b^{96}$ и $a^{100} + b^{100}$ делятся на n. Докажите, что $a^{1996} + b^{1996}$ тоже делится на n. (*Р. Женодаров*)

18. Длина высоты AB прямоугольной трапеции $ABCD$ равна сумме длин оснований AD и BC. Докажите, что биссектриса угла A делит сторону CD пополам. (*С. Токарев*)

19. В клетках таблицы 5×5 расставлены все натуральные числа от 1 до 25, причём каждые два последовательных числа стоят в соседних по стороне клетках. Какое наибольшее количество простых чисел может оказаться в одном столбце? (*Р. Женодаров*)

20. Известно, что ребус ДУБ + ДУБ + … + ДУБ = РОЩА имеет решение. Какое наибольшее количество «дубов» может быть в «роще»? (*Р. Женодаров*)

21. Можно ли в клетчатом квадрате 1996×1996 отметить некоторые клетки так, чтобы все квадраты 1000×1000 со сторонами, идущими по линиям сетки, содержали различное число отмеченных клеток? (*С. Токарев*)

22. В понедельник утром Страшила и Железный Дровосек отправились по одной дороге в Изумрудный Город. Вначале Дровосек находился на 28 миль позади Страшилы и на расстоянии 100 миль от цели. Оба идут с 8 утра до 8 вечера, и скорость каждого в течение дня постоянна. В понедельник Дровосек прошёл 20 миль, во вторник – 18, в среду – 16 и так далее, а Страшила в понедельник прошёл 4 мили, во вторник – 8, в среду – 12 и так далее. Где и когда они окажутся одновременно? (*А. Шаповалов*)

23. 25 различных натуральных чисел, не превосходящих 1000, таковы, что произведение каждых двух из них является точным квадратом. Докажите, что все эти 25 чисел сами являются точными квадратами. (*С. Токарев*)

24. В словах ПИФАГОР и ТЕОРЕМА одинаковые буквы заменили одинаковыми цифрами, а разные – разными. Получили две последовательности, из семи цифр каждая. Назовём непорядком пару соседних цифр одной из последовательностей, в которой левая цифра больше правой. Какое наименьшее суммарное число непорядков может быть в этих последовательностях? (*Р. Женодаров*)

Вариант 3

25. Управдом Остап Бендер собрал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Адам Козлевич заинтересовался, почему у них в третьем подъезде надо собрать денег на 20% больше, чем во втором, хотя квартир во всех подъездах поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что за двузначные номера приходится платить вдвое, а за трёхзначные – втрое больше, чем за однозначные. Сколько квартир в подъезде?
(*А. Шаповалов*)

26. Мария Ивановна велела Вовочке подобрать числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 так, чтобы каждое из уравнений $a_1x + a_2 = 0$, $a_2x + a_3 = 0$, $a_3x + a_4 = 0$, $a_4x + a_5 = 0$, $a_5x + a_1 = 0$ имело единственный корень, причём каждый из пяти корней должен принадлежать множеству $\{0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ \ldots,\ 1{,}9,\ 2\}$. Вовочка ответил, что это невозможно. Прав ли он?
(*Р. Женодаров*)

27. На координатной прямой отмечены точки с координатами 1, 2, …, 100. Кузнечик начал прыгать с точки 1 и через 99 прыжков оказался в точке 100, побывав по одному разу в каждой из отмеченных точек. Могла ли суммарная длина всех его прыжков оказаться равной 1996? (*Д. Калинин*)

28. В однокруговом футбольном турнире за победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. По завершении турнира очки всех команд были подсчитаны. Назовём матч интересным (неинтересным), если он завершился победой команды, у которой в итоговой таблице очков оказалось меньше (больше), чем у соперника. Могло ли интересных матчей в турнире быть больше, чем неинтересных? (*С. Токарев*)

29. Из 32 двухклеточных доминошек сложен квадрат. Докажите, что можно покрасить по восемь доминошек красной, синей, жёлтой и зелёной красками так, чтобы каждые две доминошки, имеющие общий участок границы (ненулевой длины), были окрашены различно. (*С. Токарев*)

30. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1000, сумма цифр которых нечётна. (*А. Шаповалов*)

31. На сторонах AB, BC, CD, DA единичного квадрата $ABCD$ взяты такие точки K, L, M, N соответственно, что $AK + AN + CL + CM = 2$. Докажите, что отрезки KM и LN перпендикулярны. (*В. Произволов*)

32. На своём дне рождения Леонард Эйлер угощал друзей треугольным тортом, который он разрезал на шесть кусков по трём биссектрисам. Задержавшемуся Мюнхгаузену достался последний кусок в форме прямоугольного треугольника, на основании чего барон заявил, что торт имел форму равнобедренного треугольника. Прав ли барон? (*А. Шаповалов*)

Вариант 4

33. Некоторые целые числа называются хорошими. Известно, что число 1000 хорошее, и что если число $53x + 54y$ хорошее, то и число $54x + 53y$ тоже хорошее (x и y целые). Докажите, что число 1996 хорошее. (*Р. Женодаров*)

34. 1996 орехов разложено в 20 непустых кучек. Разрешается переложить один орех из одной кучки в другую, если в первой из этих кучек больше одного ореха и число орехов в первой кучке делится на число орехов во второй. Докажите, что такими операциями всегда можно добиться, чтобы в каждой из 20 кучек стало не менее трёх орехов.
(*А. Шаповалов*)

35. У Коли и у Оли было два равных картонных многоугольника. Каждый из них разбил свой многоугольник линией на два многоугольника и покрасил один из них в красный цвет, а другой – в синий. Оказалось, что красные многоугольники равны между собой, и синие тоже. Верно ли, что можно совместить исходные многоугольники так, чтобы границы частей совпали? (*А. Шаповалов*)

36. Каждый из восьми участников шахматного турнира должен сыграть с каждым из остальных. В случае ничьей партия один раз переигрывается с переменой цвета, и результат переигровки, даже если он ничейный, заносится в протокол. Может ли случиться, что два участника турнира сыграют по 11 партий, один – 10 партий, трое – по 8 партий, а остальные двое – по 7 партий? (*Р. Женодаров*)

37. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки доски 4×4 так, чтобы в каждом квадрате 2×2 нашлись две клетки одного цвета? (*А. Шаповалов*)

38. Существует ли 1996 таких попарно взаимно простых чисел, что сумма каждых нескольких (не менее двух) из них является составным числом? (*О. Крижановский*)

39. На окружности отмечены не диаметрально противоположные точки A и B. Для каждого диаметра XY ($X \neq A$, $Y \neq B$) этой окружности отметим точку пересечения прямых AX и BY. Найдите фигуру, образованную всеми отмеченными точками.

(*О. Крижановский*)

40. Назовём положительное дробное число плохим, если оно не представимо в виде суммы нескольких последовательных членов бесконечной последовательности $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}$, …, $\frac{1}{n(n+1)}$, … Верно ли, что плохих чисел, меньших $\frac{1}{1996}$, бесконечно много?

(*О. Крижановский*)

Вариант 5

41. Пусть $0 < a < b < c < d$. Докажите, что уравнения $x^4 + ax + d = 0$ и $x^4 + bx + c = 0$ не имеют общих корней. (*Р. Женодаров*)

42. На плоскости отмечено несколько (не менее двух) точек. Каких отрезков с концами в отмеченных точках больше: тех, на которых лежит чётное число отмеченных точек, или тех, на которых лежит нечётное число отмеченных точек? (*А. Шаповалов*)

43. Сумма нескольких натуральных чисел (не обязательно различных) равна 1996. Может ли сумма их обратных величин равняться 1? (*А. Шаповалов*)

44. Какое наибольшее число вершин может иметь многоугольник, все стороны которого лежат на шести прямых? (*А. Шаповалов*)

45. Докажите, что если число n представимо в виде $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, где a, b, c целые, то и число $2n$ представимо в таком виде. (*Р. Женодаров*)

46. Назовём медианой пятиугольника отрезок, соединяющий его вершину с серединой противоположной стороны. Верно ли, что все пять медиан любого выпуклого пятиугольника пересекаются в одной точке? (*И. Рубанов*)

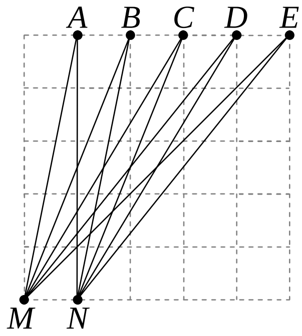
47. В черноморском казино Остап Бендер играет с крупье в фишки. Игра состоит в том, что игроки по очереди (крупье – первым, Остап – вторым) перекладывают фишки с чёрного поля на красное. За один ход можно переложить не меньше одной фишки и не больше, чем их уже есть на красном поле. Выигрывает тот, кто переложит на красное поле последнюю фишку. До начала игры на красном поле лежит десять фишек, а на чёрном – некоторое ненулевое и известное Остапу количество. У Остапа в кармане лежит десять фишек, некоторые из которых перед началом игры он незаметно подбрасывает на чёрное поле, остальные – на красное. Докажите, что он сможет выиграть. (*И. Рубанов*)

48. На плоскости даны точки A, B, C. Постройте такую окружность с центром в точке C, чтобы касательная к ней, проходящая через точку A, была перпендикулярна касательной, проходящей через точку B. (*О. Крижановский*)

Вариант 6

49. Имеется десять монет массами 1 г, 2 г, …, 10 г. Около каждой монеты положили этикетку с указанием массы, однако этикетки каких-то двух монет, массы которых отличаются на 1 г, были перепутаны. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти эти две монеты? (*Р. Женодаров*)

50. Могут ли несколько цифр, выписанных в порядке убывания, образовать запись натурального числа, кратного 111? (*Р. Женодаров*)



51. Найдите сумму величин углов *MAN*, *MBN*, *MCN*, *MDN*, *MEN*, нарисованных на клетчатой бумаге, как показано на рисунке. (*В. Произволов*)

52. Замкнутая ломаная такова, что каждые два её несоседних звена пересекаются. Докажите, что число звеньев этой ломаной нечётно. (*В. Произволов*)

53. На некоторых клетках шахматной доски стоит по фишке. За один ход фишку можно переставить через другую фишку, стоящую на соседней (по горизонтали, вертикали или диагонали) клетке, если следующая за ней клетка на той же линии свободна. Найдите наибольшее возможное число фишек на доске, если каждая из них может сделать первый ход. (*А. Грибалко*)

54. Один из углов треугольника равен 30°. Докажите, что радиус описанной окружности этого треугольника меньше половины его периметра.

55. Фирма «Id Software» плодит монстров. Каждую ночь монстры мутируют. Если сегодня у монстра m рук и n ног, то завтра он будет иметь $2m-n$ рук и $2n-m$ ног. Если хотя бы одно из чисел $2m-n$ или $2n-m$ отрицательно, монстр умирает. Докажите, что бессмертны только монстры, у которых рук и ног поровну. (*А. Шанин*)

56. Петя называет два различных числа a и b. Вова заменяет некоторые две звёздочки в выражении $* \cdot * = *$ на число a, а оставшуюся – на b. Если получится верное равенство, то выигрывает Петя, иначе – Вова. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

Письменный отборочный тур

57. Верно ли, что числа $3^{2\cdot 3^m}+3^{3^m}+1$ и $3^{2\cdot 3^n}+3^{3^n}+1$ взаимно просты при любых различных натуральных m и n? (*О. Крижановский*)

58. Какое наименьшее число коней можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждая белая клетка находилась под боем хотя бы одного из них? (*Р. Женодаров*)

59. На каждой стороне параллелограмма отмечено по точке. Всегда ли, пользуясь только циркулем, можно определить, равна ли площадь четырёхугольника с вершинами в отмеченных точках половине площади параллелограмма? (*О. Крижановский*)

60. Верно ли, что из любого 100-значного числа можно вычеркнуть одну цифру так, чтобы в полученном числе количество семёрок в чётных разрядах не превосходило количества семёрок в нечётных разрядах? (*О. Крижановский*)

61. Верно ли, что если гири можно класть на обе чаши весов, то с помощью 1996 гирь массами 1 г, 5 г, 25 г, …, 5^{997} г (гирь каждого вида по две штуки) можно уравновесить любой предмет, который весит целое число граммов и не тяжелее всех гирь, вместе взятых? (*О. Крижановский*)

62. Каждому из 1996 учеников школы нравятся ровно k из остальных учеников. При каких значениях k обязательно найдутся два ученика этой школы, которые либо оба нравятся друг другу, либо оба не нравятся друг другу?

Полуфинал

63. Докажите, что если $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$, то $(x+y)(y+z)(z+x)=0$. (*В. Произволов*)

64. На каждой грани куба написано число. Для каждых двух смежных граней рассмотрим модуль разности написанных на них чисел. Докажите, что 12 полученных чисел можно разбить на две группы по шесть чисел с равными суммами. (*В. Произволов*)

65. Треугольники ABC и OBC равносторонние. Точка M лежит на окружности с центром O и радиусом OB. Докажите, что $MB^2+MC^2=MA^2$. (*А. Савин*)

66. Требуется изготовить проволочную сетку в виде квадрата 8×8, разбитого на единичные квадратные ячейки. Можно ли спаять её, использовав в общей сложности 36 заготовок – единичных квадратиков и прямых уголков с плечами длины 2? (*А. Шаповалов*)

67. В однокруговом турнире участвовали 15 команд. Докажите, что хотя бы в одном матче встретились команды, сыгравшие перед этим в сумме нечётное число матчей. (*А. Шаповалов*)

68. Петя разрезал прямоугольный лист бумаги по прямой. Потом он разрезал по прямой один из полученных кусков. Затем он проделал то же самое с одним из трёх кусков и так далее. Докажите, что после некоторого количества разрезаний среди полученных кусков можно будет выбрать 100 многоугольников с одинаковым числом вершин. (*А. Шаповалов*)

69. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Серединные перпендикуляры к отрезкам AM и BC пересекаются в точке P, а серединные перпендикуляры к отрезкам BM и AC – в точке Q. Докажите, что прямые PQ и CM перпендикулярны. (*С. Токарев*)

70. Существуют ли такие натуральные числа M и N, что в M часов N минут угол между часовой и минутной стрелками часов равен $MN°$? (*С. Токарев*)

Финал

71. Из доски $m\times n$, где m, $n>2$, удалены все $(m-2)(n-2)$ внутренних клеток. На полученной каёмке двое играют в следующую игру. За один ход можно выпилить несколько клеток, образующих прямоугольник (возможно, состоящий из одной клетки), если при этом оставшаяся часть не распадается на два куска. Игроки ходят по очереди, и выигрывает тот, кто сделает последний ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Д. Калинин, А. Чернятьев*)

72. В треугольнике ABC одна из трисектрис угла A пересекается с одной из трисектрис угла B в ортоцентре этого треугольника. Докажите, что другие трисектрисы этих углов пересекаются в центре описанной окружности. (*А. Савин*)

73. Из пункта А в пункт Б с небольшими интервалами выехали семь велосипедистов. У одного из них была фляжка с водой. Время от времени кто-нибудь из них обгонял другого, и, если у одного из них была фляжка, тот обязательно передавал её другому. Какое наименьшее число обгонов (как с передачей фляжки, так и без) могло произойти, если фляжка по дороге побывала у всех велосипедистов и другим способом она не передавалась? (*А. Шаповалов*)

74. Есть 28 заготовок для детского домино. У каждой заготовки одна из половинок раскрашена в какой-нибудь цвет, причём всего использовано не более семи цветов. Докажите, что можно раскрасить оставшиеся половинки так, чтобы домино можно было разложить на семь кучек по четыре одинаково раскрашенных домино в каждой. (*А. Шаповалов*)

75. Можно ли из 1996 дробей $\frac{1}{1996}, \frac{2}{1995}, \ldots, \frac{1996}{1}$ выбрать три, произведение которых равно 1? (*С. Токарев*)

76. Можно ли расставить в вершинах и на рёбрах куба числа 1, 2, …, 20 так, чтобы каждое число, расположенное на ребре, равнялось полусумме чисел в концах этого ребра? (*С. Токарев*)

77. На каждой клетке шахматной доски сидело по два таракана. В некоторый момент каждый таракан переполз на соседнюю по стороне клетку, причём каждые два таракана, сидевшие на одной клетке, оказались на разных. Какое наибольшее число клеток могло освободиться? (*Р. Женодаров*)

78. В клетках таблицы 5×5 расставлено 25 различных натуральных чисел так, что все суммы чисел по строкам одинаковы. Могут ли при этом быть одинаковы все произведения чисел по столбцам? (*С. Токарев*)

Источник: http://tursavin.ru