I заключительный конкурс «Математика 6-8»

База отдыха «Рубское озеро»
Ивановская область
23-29 августа 1995 года

Личная олимпиада

1. В конференции принимали участие 19 учёных. После конференции каждый из них отправил два или четыре письма участникам этой конференции. Может ли случиться, что каждый из них получит ровно три письма? (*Р. Женодаров*)

2. На стороне AB квадрата $ABCD$ со стороной a вне его построен равносторонний треугольник ABE. Найдите радиус описанной окружности треугольника CDE. (*А. Савин*)

3. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 1995, в записи которого каждые две цифры, стоящие через одну, одинаковы. (*С. Токарев*)

4. Докажите, что в произведении $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!$ можно вычеркнуть один из 100 факториалов так, чтобы оставшееся произведение было точным квадратом. (*С. Токарев*)

5. На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC взяты такие точки M и N (точка M лежит между A и N), что $\angle MCN = 45°$. Докажите, что $MN^2 = AM^2 + BN^2$. (*В. Произволов*)

6. Можно ли в таблице 13×13 отметить некоторые клетки так, чтобы каждая клетка таблицы граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой? (*С. Токарев*)

Вариант 1

7. Найдите углы треугольника ABC, в котором $AB = BC$, а высота AH вдвое короче биссектрисы AK. (*С. Токарев*)

8. Докажите, что если числа a, b, c и $\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$ целые, то и число $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ целое. (*Р. Женодаров*)

9. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки доски 3×3 (каждую клетку – одним цветом) так, чтобы для каждых двух цветов нашлись две клетки этих цветов, имеющие общую сторону? (*С. Токарев*)

10. Выписано девять чисел: длины биссектрис, высот и медиан треугольника. Известно, что среди них не более четырёх различных. Докажите, что треугольник равнобедренный. (*А. Шаповалов*)

11. Может ли сумма квадратов 13 последовательных натуральных чисел быть квадратом целого числа?

12. В прямоугольном зале в десяти рядах по десять кресел в каждом сидят 100 чиновников, получающих разные зарплаты. Чиновник считает себя высокооплачиваемым, если зарплату больше него получает не более чем один из соседей слева, справа, спереди, сзади и по диагоналям. Какое наибольшее число чиновников могут считать себя высокооплачиваемыми? (*А. Шаповалов*)

13. По окончании однокругового волейбольного турнира оказалось, что участвовавшие в нём команды можно разбить на группы следующим образом: в первой группе – одна команда, во второй – две, …, в k-й – k команд, при этом суммарное число побед в матчах, одержанных командами каждой группы, одно и то же. Сколько команд участвовало в турнире? (*А. Грибалко*)

14. Решите ребус СУМК,А + СУМК,А = БАГАЖ. (*А. Гейн*)

Вариант 2

15. В каждом из 1995 полей, расположенных по кругу, записано натуральное число. На одно из полей ставится фишка. Ход состоит в том, что фишку сдвигают по часовой стрелке на число полей, написанное там, где она была, затем увеличивают на 1 число там, куда она пришла. Докажите, что через некоторое время фишка побывает на всех полях. (*А. Шаповалов*)

16. На полоске из 100000 клеток, первоначально пустой, два игрока ходят по очереди. Первый может за один ход выставить два крестика в любые две свободные клетки. Второй может стереть любое количество идущих подряд крестиков, между которыми нет свободных клеток. Если после хода первого образуется 13 или более идущих подряд крестиков, он выиграл. Может ли первый игрок обеспечить себе победу? (*А. Шаповалов*)

17. Докажите, что если $xy + z = yz + x = zx + y$, то $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$. (*С. Токарев*)

18. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут, – всего 12 человек. Каждый из них сделал заявление: «Все сидящие за столом, кроме, быть может, меня и моих соседей – лжецы». Сколько рыцарей сидит за столом? (*Р. Женодаров*)

19. В треугольнике *ABC* угол *A* равен 60°, а медиана *BM* равна высоте *CH*. Докажите, что треугольник *ABC* равносторонний. (*С. Токарев*)

20. Существует ли натуральное число, которое в 1995 раз больше суммы своих простых делителей? (*С. Токарев*)

21. Пятизначное число, все цифры которого различны, умножили на 4. В результате получилось число, записываемое теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое это число?

22. Можно ли клетчатый квадрат 1995×1995 разрезать по линиям сетки на 10000 прямоугольников с равными диагоналями? (*А. Шаповалов*)

Вариант 3

23. Укажите такие шесть точек на плоскости, каждые пять из которых можно покрыть двумя квадратами с диагоналями длины 1, но все шесть нельзя покрыть двумя кругами диаметра 1. (*В. Произволов*)

24. В треугольнике *ABC* угол *A* равен 30°, а медиана *BM* равна высоте *CH*. Найдите углы *B* и *C*. (*С. Токарев*)

25. Шестизначное число начинается с цифры 1. Если эту цифру перенести в конец числа, то оно увеличится в 3 раза. Какое это число? (*А. Савин*)

26. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $ab + bc + ca$, а число $a + b + c$ простое. Докажите, что $a = b = c = 1$. (*А. Грибалко*)

27. В левой нижней клетке доски $n \times n$ стоит конь. При каких $n > 2$ наименьшее число ходов, за которое конь может дойти до правой верхней клетки, равно наименьшему числу ходов, за которое он может дойти до правой нижней клетки? (*А. Грибалко*)

28. У крестьянина были коза, корова и кобыла, а ещё стог сена и сын. Сын подсчитал, что этого сена хватит козе и кобыле на один месяц, козе и корове – на $\frac{3}{4}$ месяца, а корове и кобыле – на $\frac{1}{3}$ месяца. Отец сказал, что сын плохо учится в школе. Прав ли он?

(*Г. Кукин*)

29. На доске было написано число вида 77…7. Петя стёр у этого числа последнюю цифру, полученное число умножил на 3 и к произведению прибавил стёртую цифру. С полученным числом он проделал такую же операцию и так далее. Докажите, что через некоторое время у него получится число 7. (*А. Грибалко*)

30. Каждая из 12 лампочек, расположенных по кругу, может находиться в двух состояниях: гореть или не гореть. За один ход можно изменить состояние любых трёх лампочек, расположенных подряд. Вначале горит ровно одна лампочка. Можно ли добиться, чтобы горели все лампочки?

Вариант 4

31. Найдите углы треугольника ABC, в котором $AB = BC$, а высота BH вдвое короче биссектрисы AK. (*С. Токарев*)

32. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 3$ и $BC = 4$. Сначала точка A перемещается на некоторое расстояние параллельно отрезку BC. Затем точка B перемещается на некоторое расстояние параллельно отрезку AC. И, наконец, точка C перемещается на некоторое расстояние параллельно отрезку AB. В итоге оказалось, что угол B прямой и $AB = 1$. Чему стала равна длина отрезка BC? (*И. Акулич*)

33. По кругу записано восемь чисел так, что каждое из них равно сумме трёх следующих за ним по часовой стрелке. Докажите, что все эти числа равны нулю. (*О. Крижановский*)

34. Записав числа 1, $\frac{1}{2}$, …, $\frac{1}{10}$ в каком-либо порядке, расставьте между ними знаки арифметических действий так, чтобы полученное выражение равнялось 0. (*А. Шаповалов*)

35. Можно ли разрезать квадрат на 1000-угольник и 199 пятиугольников? (*А. Шаповалов*)

36. Каждая клетка квадрата 5×5 покрашена в один из четырёх цветов так, что в каждом квадрате 2×2 встречаются все четыре цвета. Какое наибольшее число клеток одного цвета может быть в квадрате? (*Р. Женодаров*)

37. Шесть футбольных команд в однокруговом турнире набрали 12, 10, 9, 8, 7 и 6 очков. Сколько очков (не обязательно целое число) начислялось за победу в матче, если за ничью начислялось 1 очко, а за поражение – 0? (*С. Токарев*)

38. Дано три натуральных числа, сумма каждых двух из которых является простым числом. Докажите, что два из данных чисел равны 1. (*Р. Женодаров*)

Вариант 5

39. Пусть a и b – натуральные числа, причём сумма цифр одного из них равна 1993, а другого – 1994. Может ли сумма цифр числа $a + b$ равняться 1995? (*С. Охитин*)

40. Можно ли разрезать квадрат на треугольники так, чтобы каждый из них граничил (по отрезку) ровно с тремя другими? (*А. Шаповалов*)

41. Брат-старшеклассник спросил у сестрёнки: «Сколько было таких дней, когда тебе было ровно в 3 раза меньше лет, чем мне?» – «Три дня», – ответила сестра. «А в 4 раза?» – «Четыре дня». – «А в 6 раз?» Тут сестрёнка задумалась. Она знала, что такие дни были, но сколько? Помогите ей ответить. (*А. Шаповалов*)

42. Существуют ли два выпуклых четырёхугольника, все стороны каждого из которых лежат на серединных перпендикулярах к сторонам другого? (*С. Токарев*)

43. Можно ли числа 1, 2, 3, 4, 5 обозначить в некотором порядке буквами a, b, c, d, e так, чтобы выполнялось равенство
$(a + b)(b + c)(c + d)(d + e)(e + a) = (a + c)(c + e)(e + b)(b + d)(d + a)$? (*С. Токарев*)

44. Отношение двух двузначных чисел умножили на 100. Какое наименьшее целое число могло при этом получиться? (*Л. Курляндчик*)

45. Имеется 1800 шариков – по 100 шариков 18 цветов. Первый игрок выбирает один из шариков и даёт второму, который помещает его на одну из свободных клеток доски 9×9. Если при этом получается пять шариков одного цвета, стоящих подряд в горизонтали или в вертикали, они снимаются с доски и больше в игре не участвуют. Если второму некуда поставить шарик, то он проиграл. Если шарики кончились, то проиграл первый. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Р. Женодаров*)

46. В треугольнике *ABC* проведены биссектриса *AL*, высота *BH* и медиана *CM*. Могут ли они ограничивать равносторонний треугольник (ненулевой площади)?

Вариант 6

47. На доске написано десять чисел, среди которых, возможно, есть равные. Оказалось, что среднее арифметическое любых трёх из них уже есть на доске. Докажите, что все числа равны. (*А. Шаповалов*)

48. Можно ли записать в клетках шахматной доски все натуральные числа от 1 до 64 так, чтобы сумма чисел в каждых двух клетках, имеющих общую сторону или вершину, не делилась на 4? (*А. Шаповалов*)

49. Внутри квадрата *ABCD* найдите все точки *X*, для которых $AX + CX = BX + DX$. (*С. Токарев*)

50. В треугольнике *ABC* угол *A* тупой, а перпендикуляры к сторонам *AB* и *AC*, восстановленные в точке *A*, делят сторону *BC* на три равные части. Найдите углы треугольника *ABC*.

51. Заполните свободные клетки квадрата буквами А, В, Т, О, Р так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух главных диагоналей все эти буквы встречались по одному разу. (*А. Савин*)

				Т
				А
				В
Т	О	В	А	Р
				О

52. Число вида 100…01 кратно 19. Докажите, что оно кратно 13. (*О. Крижановский*)

53. Квас заполняет несколько 50-литровых бутылей. Если его разлить в 40-литровые бутыли, то понадобится на пять бутылей больше, причём одна из них останется неполной. Если же этот квас разлить в 70-литровые бутыли, то их понадобится на четыре меньше и тоже одна бутыль останется неполной. Сколько имеется кваса? (*Г. Кукин*)

54. Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном 1995-угольнике. Запрещено проводить диагональ, если она пересекается во внутренних точках с уже проведёнными. Проигрывает тот, после хода которого образуется четырёхугольник, диагонали которого не проведены. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*О. Крижановский*)

Полуфинал

55. Можно ли в вершинах куба расставить различные числа так, чтобы каждое число равнялось сумме трёх, соединённых с ним рёбрами куба? (*С. Токарев*)

56. Из бумажного прямоугольника вырезали два одинаковых круга. Проведите прямую, делящую получившуюся фигуру на две части равной площади. (*В. Произволов*)

57. Андрей вышел из пункта А в 10:18 и, двигаясь с постоянной скоростью, пришёл в пункт Б в 13:30. В тот же день Борис вышел из Б в 9:00 и, идя по той же дороге с постоянной скоростью, пришёл в А в 11:40. Дорога пересекает реку. Андрей и Борис одновременно подошли к мосту через эту реку, каждый со своей стороны. Андрей ушёл с моста на одну минуту позже Бориса. Когда они подошли к мосту? (*А. Савин*)

58. Вершины замкнутой 1995-звенной ломаной совпадают с вершинами правильного 1995-угольника. Докажите, что у этой ломаной найдутся три равных звена. (*А. Шаповалов*)

59. Можно ли подобрать компанию, в которой у каждого было бы ровно шесть друзей, а у каждых двух – ровно два общих друга? (*С. Токарев*)

60. На бесконечном листе клетчатой бумаги два игрока по очереди красят стороны клеток. Разрешается использовать восемь цветов. Первый стремится к тому, чтобы получилась замкнутая ломаная, каждые два соседних звена которой окрашены в разные цвета. Может ли второй ему помешать? (*Р. Женодаров*)

61. Обозначим через $p(n)$ произведение всех цифр натурального числа n. Вычислите $p(1000)+p(1001)+\ldots+p(2000)$. (*С. Токарев*)

62. В выпуклый четырёхугольник вписан параллелограмм, вершины которого делят стороны четырёхугольника в постоянном отношении $1:2$, считая по часовой стрелке. Докажите, что исходный четырёхугольник – тоже параллелограмм. (*В. Произволов*)

Финал

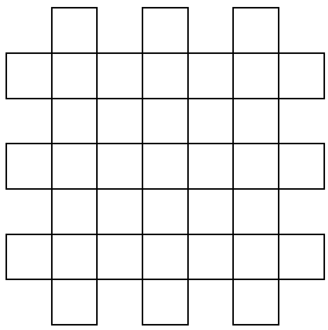
63. Может ли наименьшее общее кратное двух натуральных чисел равняться их сумме? (*С. Токарев*)

64. Дан треугольник ABC. Прямая, параллельная AC, пересекает сторону AB в точке P, медиану AM – в точке N, сторону BC – в точке Q. Найдите длину стороны AC, если $PN=3$, $NQ=5$. (*В. Кууск*)

65. На шахматную доску положили восемь доминошек так, что каждая покрывает две соседние клетки. Докажите, что на доске найдётся квадрат, состоящий из четырёх клеток, ни одна из которых не покрыта доминошкой. (*Р. Женодаров*)

66. В клетках таблицы 7×7 расставлены числа -1, 0 и 1 так, что в каждом квадрате 3×3 сумма чисел равна 0. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел таблицы? (*О. Крижановский*)

67. Докажите, что число $1994^2+1994^2\cdot 1995^2+1995^2$ является точным квадратом. (*В. Произволов*)



68. Можно ли подобрать компанию, в которой у каждого было бы ровно пять друзей, а у каждых двух – ровно два общих друга? (*С. Токарев*)

69. Может ли каждая диагональ выпуклого семиугольника быть перпендикулярна какой-либо другой его диагонали? (*С. Токарев*)

70. На какое наименьшее число прямоугольников можно разрезать фигуру, изображённую на рисунке, если резать разрешается только по линиям сетки? (*А. Шаповалов*)

Источник: http://tursavin.ru